7

Э. КАРТАН

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ИЗЛОЖЕННЫЕ МЕТОДОМ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Э. КАРТАН

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ИЗЛОЖЕННЫЕ МЕТОДОМ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

Перевод проф. С. П. Финикова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1963

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть вторая

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

Часть третья

СТРУКТУРНЫЕ КОНСТАНТЫ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В настоящем издании дается перевод двух работ Э. Картана. Первая работа «Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства» содержит наиболее доступное изложение сущности метода подвижного репера и теории конечных непрерывных групп и в этом отношении может служить хорошим введением к методу Э. Картана. Содержание этой работы составляют лекции, прочитанные Э. Картаном в Москве в Научно-исследовательском институте математики и механики 16—20 июня 1930 г. Эти лекции составлены по моим записям; они уже издавались у нас в 1933 г., но в настоящее время это издание стало библиографической редкостью.

Второй, основной работой настоящего издания служит монография «Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера». Как показывает само название, в этой работе параллельно излагается теория конечных непрерывных групп и дается приложение этой теории к отдельным вопросам дифференциальной геометрии. Все это проводится единым методом — методом подвижного репера.

В первой части автор рассказывает об основах метода подвижного репера и прилагает этот метод к теории пространственных кривых (глава I), теории минимальных кривых (глава II), теории линейчатых поверхностей, как действительных (глава III), так и изотропных (глава IV).

Во второй части излагаются основные понятия теории конечных непрерывных групп: вводится подвижной репер группы (глава V); рассматриваются различные соотношения (изоморфизм, подобие и т. п.), которые могут существовать между двумя группами (глава VI) и между самой группой

и ее группой параметров (глава VII); выписываются определяющие уравнения группы (глава VIII); строится теория представлений данной абстрактной группы (глава IX), и, наконец, заканчивается эта часть приложением всех рассмотренных вопросов к теории плоских действительных кривых в аффинной унимодулярной и проективной геометрии (глава X).

В третьей части выводятся уравнения структуры группы Э. Картана (глава XI) и С. Ли (глава XIV) и устанавливается связь между ними; кроме того, здесь рассматриваются вопросы, связанные с доказательством прямой и обратной частей третьей основной теоремы С. Ли (главы XIII и XIV). В качестве приложений здесь рассматриваются проективная теория плоских кривых и обычная евклидова теория поверхностей.

Все изложение в монографии ведется с предельной ясностью и оригинальностью.

Книга послужит хорошим руководством для каждого, кто пожелает изучить теорию конечных непрерывных групп.

С. П. Фиников

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА, ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекции, прочитанные Э. Картаном
в Научно-исследовательском институте
математики и механики

От автора

На этих страницах я излагаю содержание пяти лекций, которые я прочел в Москве по приглашению Московского научно-исследовательского института математики и механики с 16 по 20 июня 1930 г. Я остановился здесь более подробно, чем в устном изложении, на примерах, иллюстрирующих теорию. Приведено также (§ VII и VIII) систематическое изложение метода подвижной системы отнесения (метода подвижного репера). Теоремы, которые потребовали бы знания техники теории уравнений с частными производными, приведены без доказательства.

Э. Картан

I. МЕТОД ПОДВИЖНОГО ТРЕХГРАННИКА

1. Метод подвижного трехгранника Дарбу. Всем геометрам известно, что удалось извлечь Дарбу (*G. Darboux*) в теории кривых и поверхностей из употребления подвижного трехгранника, внутренним образом связанного с различными точками кривой или поверхности. Для кривой осями трехгранника, известного под именем трехгранника Френе (*Frenet*), служат касательная, главная нормаль и бинормаль кривой. В случае поверхности его оси — касательные к главным направлениям и нормаль к поверхности; Дарбу пользовался также произвольным прямоугольным трехгранником с единственным условием, чтобы третья ось была нормальна к поверхности. Метод подвижного трехгранника с успехом применяется и в других геометрических теориях, например в теории триортогональных систем поверхностей.

Если подумать о внутренних причинах плодотворности этого метода, то можно прежде всего заметить, что область применения его ограничивается *дифференциальной* геометрией; он не принесет пользы в теории алгебраических кривых, как таковых. Метод приложим только к тем проблемам, которые касаются бесконечно малых свойств кривой или поверхности. В области же дифференциальной геометрии его успех определяется двумя причинами:

1°. Трехгранник, присоединенный к данной точке кривой (или поверхности), представляет наиболее простую систему отнесения для изучения бесконечно малых свойств кривой (или поверхности) в окрестности точки.

2°. Кривая (или поверхность) вполне определена *вплоть до перемещения в пространстве,* если известны компоненты

по осям подвижного трехгранника бесконечно малого перемещения его при переходе из данной точки кривой (или поверхности) в бесконечно близкую.

2. Принципы выбора присоединенного трехгранника, относительная простота его определения. Первая причина имеет характер простого удобства; можно сказать, что она определяется эстетическими принципами. Поэтому она не налагает на выбор трехгранника никаких стесняющих условий. Легко понять, что в некоторых вопросах может даже оказаться более удобным выбирать трехгранник не прямоугольный, а косоугольный, изменяющийся от точки к точке. Как бы то ни было, он должен определяться теми дифференциальными свойствами кривой или поверхности, которые появляются в первую очередь, т. е. которые вводят дифференциальные элементы низшего порядка. И действительно, в случае кривой или поверхности подвижной трехгранник Дарбу определяется дифференциальными элементами первых двух порядков.

3. Определение кривой или поверхности компонентами движения трехгранника. Вторая причина покоится на хорошо известной теореме: *если имеется два непрерывных семейства прямоугольных трехгранников и можно установить взаимно однозначное соответствие между трехгранниками этих семейств так, что относительные компоненты бесконечно малого перемещения трехгранника первого семейства равны относительным компонентам бесконечно малого перемещения соответствующего трехгранника второго семейства, то существует определенное перемещение, которое приводит в совпадение одновременно все трехгранники первого семейства с соответствующими трехгранниками второго. Относительными* компонентами бесконечно малого перемещения подвижного прямоугольного трехгранника являются шесть компонент по осям этого трехгранника бесконечно малого перемещения вершины трехгранника и соответственного бесконечно малого вращения его.

Эта теорема, строго говоря, не требует, чтобы трехгранники были прямоугольными; надо только, чтобы рассматриваемые трехгранники были все равны друг другу; шесть величин, которые по отношению к осям подвижного трехгранника аналитически определяют бесконечно малое перемещение его, будут выражены более или менее сложно, но теорема сохранит силу. Наоборот, если пользоваться трехгранниками переменной формы, то, конечно, можно аналитически определить переход от одного трехгранника к бесконечно близкому, но придется ввести изменение формы трехгран-

ника, т. е. паразитические элементы, не имеющие отношения к свойствам изучаемой кривой или поверхности.

4. Два принципа выбора присоединенного трехгранника. Предыдущие рассуждения показывают, что метод подвижного трехгранника, чтобы сохранить всю свою силу, должен удовлетворять следующим условиям:

1°. *Трехгранник, связанный с данной точкой изучаемого многообразия, должен быть определен внутренним образом дифференциальными элементами первых порядков многообразия.*

2°. *Различные трехгранники должны быть прямоугольными, или, по крайней мере, все они должны быть равны между собой.*

Сказать, что трехгранник определен внутренним образом, — значит утверждать, что трехгранники, определенные согласно выбранному закону в соответствующих точках двух равных многообразий, совпадут после перемещения, которое приведет в совпадение два многообразия.

Что касается отмеченного выше условия удобства, то это зависит от вида многообразия. С точки зрения чисто логической, ничто не мешает, например, заменить трехгранник Френе для кривой в пространстве совсем другим трехгранником, прямоугольным или не прямоугольным, который был бы с ней инвариантно связан.

II. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ПОДВИЖНОГО ТРЕХГРАННИКА К ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ КРИВЫХ

5. Границы применимости метода Дарбу. Можно ли присоединить внутренним образом трехгранник к минимальной кривой? В классических приложениях метода подвижного трехгранника выбор трехгранника подсказывается сам собой, так что геометр не испытывает никакого колебания. Но, даже не покидая евклидову геометрию, мы найдем случай, когда дело обстоит иначе. Рассмотрим, например, в комплексной евклидовой геометрии минимальную кривую. Трехгранника Френе, который можно рассматривать как трехгранник, образованный тремя единичными векторами, отложенными на касательной, главной нормали и бинормали, здесь уже не существует, так как всякий вектор, отложенный на касательной, имеет длину, равную нулю. Правда, можно выбирать трехгранники, у которых *координатные векторы* $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$ будут нулевой длины со скалярным произведением, равным единице, а вектор $\mathbf{e}_2$ — единичным вектором, перпенди-

кулярным к двум первым; вектор $\mathbf{e}_1$ мы примем тогда касательным к кривой, но совершенно не видно, по крайней мере непосредственно, никакого основания, чтобы выбрать за $\mathbf{e}_1$ тот или другой из векторов, касательных к кривой (они все, впрочем, равны между собой).

С другой стороны, нормальная плоскость к кривой совпадает с соприкасающейся, поэтому не существует, по-видимому, никакого основания, чтобы та или другая нормаль играла роль главной нормали. Следовательно, не установлен ни выбор вектора $\mathbf{e}_1$, ни выбор вектора $\mathbf{e}_2$.

Этот пример показывает законность постановки следующей проблемы:

Возможно ли присоединить ко всякой точке минимальной кривой трехгранник, определенный внутренним образом и всегда равный самому себе?

И вообще: *допускает ли метод подвижного трехгранника обобщение на все вопросы дифференциальной геометрии?*

6. Исключение: изучаемое многообразие инвариантно относительно группы движений, оставляющих инвариантной одну его точку. Прежде чем заняться этой общей задачей, заметим, что, конечно, найдутся случаи, когда определение трехгранника, внутренним образом связанного с переменной точкой кривой или поверхности, невозможно. Достаточно вспомнить о прямой линии (не изотропной): первая ось трехгранника Френе вполне определена, но не может быть никакого основания, чтобы предпочесть для второй оси то или другое направление, перпендикулярное к прямой. Заметим, что в этом случае — и мы увидим позднее всю важность этого замечания — невозможность определения трехгранника, внутренним образом связанного с кривой, лежит в природе вещей — существует группа перемещений, оставляющих неподвижными одновременно все точки прямой. Для логической невозможности определения трехгранника достаточно даже, чтобы изучаемое многообразие было инвариантно по отношению к группе перемещений, лишь бы было бесконечное множество перемещений этой группы, оставляющих неподвижной произвольно заданную точку M этого многообразия, ибо тогда определение трехгранника, внутренним образом связанного с точкой M, если бы оно было возможно, дало бы этот трехгранник совершенно так же, как и все те, которые можно из него получить, применяя рассматриваемые перемещения. Таким образом, например, невозможно определение прямоугольного трехгранника, внутренним образом связанного с точкой M какой-нибудь сферы, ибо существует беско-

нечное множество перемещений, оставляющих инвариантной сферу и оставляющих неподвижной точку M.

7. Систематизация построения присоединенного трехгранника. Оставим это пока в стороне (мы увидим далее, что это единственный случай, когда определение трехгранника, внутренним образом связанного с поверхностью, невозможно). Прежде чем рассмотреть минимальную кривую, вернемся к классическому случаю обыкновенной кривой в пространстве и исследуем, немного педантично, процесс, посредством которого, изгоняя по возможности всякую геометрическую интуицию, можно прийти к трехграннику Френе.

Присоединим сначала к данной точке M пространственной кривой — определенной, допустим, с помощью параметра t — целое семейство прямоугольных трехгранников, а именно: все те трехгранники, которые имеют свою вершину в точке M. Назовем их *трехгранниками нулевого порядка.* Они зависят от трех параметров u_1, u_2, u_3, которые мы будем называть *вторичными параметрами нулевого порядка.* Если мы будем менять точку M, то трехгранники нулевого порядка будут зависеть от четырех параметров u_1, u_2, u_3, t. Обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 компоненты по подвижным осям переноса вершины трехгранника M и через ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} относительные компоненты мгновенного вращения трехгранника. Ясно, что три компоненты ω_1, ω_2, ω_3, обращающиеся в нуль, когда точка M остается неподвижной, имеют вид:

$$\omega_1 = p_1\,dt, \quad \omega_2 = p_2\,dt, \quad \omega_3 = p_3\,dt;$$

что касается компонент вращения ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, то они содержат не только dt, но и дифференциалы вторичных параметров du_1, du_2, du_3; нетрудно даже заметить, что они линейно независимы по отношению к этим трем дифференциалам.

Коэффициенты p_1, p_2, p_3, очевидно, зависят от числовых значений вторичных параметров; поэтому между этими параметрами и параметром t можно установить два соотношения так, чтобы отношения $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ обратились в нуль; геометрически это сводится к выбору первой оси касательной к кривой.

Трехгранники, удовлетворяющие этому условию, будем называть *трехгранниками первого порядка*; ограничиваясь ими, мы будем иметь

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$$

Так как трехгранники первого порядка зависят только от одного параметра, то компоненты ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} бесконечно малого вращения при условии $dt=0$ будут связаны двумя линейными соотношениями. Геометрически это означает следующее: если закрепить точку M, то трехгранник первого порядка допускает вращение только около своей первой оси, так что компоненты вращения около двух последних осей ω_{31}, ω_{12} равны нулю. Отсюда следует, что при изменении положения точки M

$$\omega_{31} = p_{31}\,dt, \quad \omega_{12} = p_{12}\,dt.$$

Отношения

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_1} = \frac{p_{31}}{p_1}, \quad \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = \frac{p_{12}}{p_1}$$

зависят теперь только от одного вторичного параметра первого порядка, и его можно выбрать так, чтобы обратить в нуль одно из этих отношений, например p_{31}. Мы приходим, таким образом, к вполне определенной системе отнесения второго порядка. Выражение ω_1 есть элемент дуги ds, отношение $\frac{p_{12}}{p_1}$ — кривизна кривой. Компонента $\omega_{23}=p_{23}dt$ дает кручение $\frac{p_{23}}{p_1}$ кривой.

Мы видим, что от трехгранников нулевого порядка, зависящих от трех параметров, путем последовательных ограничений мы пришли к трехгранникам первого порядка, зависящим от одного параметра, и в конце концов к единственному трехграннику второго порядка — трехграннику Френе.

8. Построение присоединенного трехгранника минимальной кривой. Перейдем теперь к случаю минимальной кривой. Воспользуемся ради удобства трехгранником, образованным тремя векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, присоединенными к точке M кривой и удовлетворяющими условиям

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = 1. \tag{1}$$

Относительными компонентами бесконечно малого перемещения трехгранника служат коэффициенты, входящие в формулы

$$d\mathbf{M} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^1\mathbf{e}_1 + \omega_i^2\mathbf{e}_2 + \omega_i^3\mathbf{e}_3.$$

Девять компонент ω_i^j не будут независимы. Дифференцируя равенства (1), легко найдем

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^2 = 0, \\ \omega_1^2 + \omega_2^3 = \omega_2^1 + \omega_3^2 = \omega_1^1 + \omega_3^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем считать компонентами бесконечно малого перемещения шесть величин ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^1, ω_1^2, ω_3^2.

Мы можем тотчас же сэкономить, начав с трехгранников первого порядка, для которых $\mathbf{e}_1$ есть какой-нибудь вектор касательной к кривой. Эти трехгранники зависят от двух вторичных параметров; один из них служит для определения самого вектора $\mathbf{e}_1$, а другой,— для определения направления вектора $\mathbf{e}_2$, перпендикулярного к $\mathbf{e}_1$. Прежде всего имеем:

$$\omega^2 = \omega^3 = 0.$$

Из четырех остающихся компонент две, ω^1 и ω_1^2, обращаются в нуль, если оставить неподвижной точку M; действительно, дифференциал $d\mathbf{e}_1$ вектора $\mathbf{e}_1$ должен быть вектором, отложенным на определенной касательной к кривой, и не должен иметь компонент, параллельных $\mathbf{e}_2$. Что касается двух других компонент, ω_1^1 и ω_3^2, то они зависят линейно от дифференциалов двух вторичных параметров. Меняя главный параметр t и два вторичных, мы имеем, следовательно,

$$\omega^1 = p^1\,dt, \quad \omega_1^2 = p_1^2\,dt.$$

Коэффициенты p^1 и p_1^2 *a priori* зависят от вторичных параметров. Чтобы увидеть, как они от них зависят, заменим трехгранник ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) другим трехгранником первого порядка (η_1, η_2, η_3). Легко получим

$$\eta_1 = \lambda \mathbf{e}_1, \ \ \eta_2 = \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_1, \ \ \eta_3 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_3 - \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{e}_2 - \frac{\mu^2}{2\lambda}\mathbf{e}_1.$$

Новые значения компонент ω^1 и ω_1^2 вычисляются без затруднения, и мы находим

$$\overline{\omega}^1 = \frac{1}{\lambda}\omega^1, \quad \overline{\omega}_1^2 = \lambda\omega_1^2,$$

откуда

$$\overline{p}^1 = \frac{1}{\lambda}p^1, \quad \overline{p}_1^2 = \lambda p_1^2.$$

Можно теперь выбрать λ так, чтобы привести отношение $\frac{p_1{}^2}{p^1}$ к определенному числовому значению, например к 1. Мы получаем, таким образом, семейство трехгранников второго порядка, которое зависит не более чем от одного вторичного параметра и для которого

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega_1{}^2 = \omega^1.$$

Если теперь станем менять трехгранники второго порядка, оставляя неподвижной точку M, то две компоненты $\omega_1{}^1$ и $\omega_3{}^2$ не будут более независимы: они связаны некоторым соотношением. Мы легко его получим, заметив, что вектор $\mathbf{e}_1$ теперь неподвижен, его дифференциал равен нулю и компонента $\omega_1{}^1$, следовательно, обращается в нуль вместе с dt. Перемещая M, мы будем иметь

$$\omega_1{}^1 = p_1{}^1\, dt.$$

Чтобы увидеть, как $p_1{}^1$ зависит от вторичного параметра трехгранников второго порядка, заменим трехгранник $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ трехгранником (η_1, η_2, η_3) с векторами

$$\eta_1 = \mathbf{e}_1, \quad \eta_2 = \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_1, \quad \eta_3 = \mathbf{e}_3 - \mu \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{e}_1.$$

Замечая, что $\omega_1{}^1$ есть скалярное произведение $\mathbf{e}_3 d\mathbf{e}_1$, мы найдем:

$$\overline{\omega}_1{}^1 = \omega_1{}^1 - \mu \omega_1{}^2 = (p_1{}^1 - \mu p^1)\, dt.$$

Можно, следовательно, используя параметр μ, обратить $p_1{}^1$ в нуль. Мы приходим, таким образом, к определенному трехграннику третьего порядка, для которого

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1{}^2 - \omega^1 = \omega_1{}^1 = 0.$$

Компонента $\omega_3{}^2$ имеет тогда вид $k\omega^1$, и коэффициент k есть *дифференциальный инвариант* кривой; это — *псевдокривизна*.

Наконец, выражение ω^1 неопределенное, пока мы имеем дело с трехгранниками первого порядка, принимает определенное значение, как только мы приходим к трехгранникам второго порядка. Это — элемент *псевдодуги* минимальной кривой $d\sigma$.

Можно теперь написать формулы Френе для минимальных кривых; именно

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{d\sigma} &= \mathbf{e}_1, \\ \frac{d\mathbf{e}_1}{d\sigma} &= \mathbf{e}_2, \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{d\sigma} &= -k\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \\ \frac{d\mathbf{e}_3}{d\sigma} &= k\mathbf{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Две минимальные кривые равны, если псевдокривизна k у обеих кривых — одна и та же функция от псевдодуги σ, или лучше, если $\frac{dk}{d\sigma}$ — одна и та же функция от k.

9. Исключенный случай — прямая. Заметим, что когда мы приводили к единице отношение

$$\frac{\overline{p}_1^{\,2}}{\overline{p}^1} = \lambda^2 \frac{p_1^{\,2}}{p^1},$$

то неявно предполагали, что коэффициент $p_1^{\,2}$ не равен нулю, т. е. геометрически, что мы не имеем дела с прямой. Если данная линия — прямая, то нет никакого средства отличить один от другого трехгранники первого порядка и тем более нет средства ввести на прямой *натуральный параметр* σ, что, впрочем, геометрически очевидно.

Заметим, кроме того, что мы воспользовались геометрическими соображениями, чтобы предвидеть, какие из новых компонент бесконечно малого перемещения при переходе от трехгранников данного порядка к трехгранникам высшего порядка не будут более зависеть от дифференциалов вторичных параметров. Метод, которым мы пользовались, если и дает форму уравнений Френе, *что только и представляет интерес в теоретических исследованиях,* — не дает нам явно ни выражения $d\sigma$, ни выражения k.

Можно обойти эти неудобства, подсчитывая непосредственно с самого начала компоненты бесконечно малого перемещения для трехгранника нулевого порядка. Мы проведем это для случая минимальной кривой.

10. Подсчет элементов минимальной кривой по формулам

Вейерштрасса. Определим минимальную кривую по Вейерштрассу уравнениями в прямоугольных координатах:

$$x = \int \frac{1-t^2}{2} F(t)\,dt, \quad y = \int i\,\frac{1+t^2}{2} F(t)\,dt, \quad z = \int tF(t)\,dt, \qquad (4)$$

где x, y, z означают прямоугольные координаты точки кривой, $F(t)$ — аналитическую функцию от t. Обозначим через α_i, β_i, γ_i, проекции вектора $\mathbf{e}_i$ на неподвижные ортогональные оси.

Имеем

$$\omega^1 = \mathbf{e}_3\,d\mathbf{M} = \alpha_3\,dx + \beta_3\,dy + \gamma_3\,dz,$$

$$\omega^2 = \mathbf{e}_2\,d\mathbf{M} = \alpha_2\,dx + \beta_2\,dy + \gamma_2\,dz,$$

$$\omega^3 = \mathbf{e}_1\,d\mathbf{M} = \alpha_1\,dx + \beta_1\,dy + \gamma_1\,dz,$$

$$\omega_1{}^1 = \mathbf{e}_3\,d\mathbf{e}_1 = \alpha_3\,d\alpha_1 + \beta_3\,d\beta_1 + \gamma_3\,d\gamma_1,$$

$$\omega_1{}^2 = \mathbf{e}_2\,d\mathbf{e}_1 = \alpha_2\,d\alpha_1 + \beta_2\,d\beta_1 + \gamma_2\,d\gamma_1,$$

$$\omega_3^2 = -\mathbf{e}_3\,d\mathbf{e}_2 = -\alpha_3\,d\alpha_2 - \beta_3\,d\beta_2 - \gamma_3\,d\gamma_2.$$

Чтобы определить трехгранник нулевого порядка, можно взять

$$\alpha_1 = \lambda\,\frac{1-t^2}{2}, \qquad \beta_1 = i\lambda\,\frac{1+t^2}{2}, \qquad \gamma_1 = \lambda t,$$

$$\alpha_2 = -t + \mu\,\frac{1-t^2}{2}, \qquad \beta_2 = it + i\mu\,\frac{1+t^2}{2}, \qquad \gamma_2 = 1 + \mu t,$$

$$\alpha_3 = \rho\,\frac{1-u^2}{2}, \qquad \beta_3 = i\rho\,\frac{1+u^2}{2}, \qquad \gamma_3 = \rho u,$$

с условиями

$$u - t = \frac{2}{\mu}, \quad \lambda\rho = -\frac{1}{2}\mu^2.$$

Простой подсчет дает тогда

$$\omega^1 = \frac{1}{\lambda} F(t)\,dt, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0,$$

$$\omega_1{}^1 = \frac{d\lambda}{\lambda} - \mu\,dt, \quad \omega_1{}^2 = \lambda\,dt, \quad \omega_3{}^2 = 2\rho\,\frac{d\mu}{\mu^2} - \rho\,dt.$$

Мы видим, что отношение

$$\frac{\omega_1{}^2}{\omega^1} = \frac{\lambda^2}{F(t)}$$

можно привести к единице, полагая

$$\lambda^2 = F(t).$$

Тогда получим

$$\omega^1 = d\sigma = \sqrt{F(t)}\,dt,$$

$$\omega_1{}^1 = \left(\frac{1}{2}\frac{F'(t)}{F(t)} - \mu\right)dt, \tag{5}$$

и $\omega_1{}^1$ можно привести к нулю, полагая

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{F'(t)}{F(t)},$$

откуда

$$\rho = -\frac{1}{8}\frac{(F')^2}{\lambda F^2}.$$

Наконец,

$$\omega_3{}^2 = \frac{5(F')^2 - 4FF''}{8\lambda F^2}\,dt = \frac{5(F')^2 - 4FF''}{8F^3}\,d\sigma,$$

что дает кривизну

$$k = \frac{5(F')^2 - 4FF''}{8F^3}. \tag{6}$$

Мы видим, что $d\sigma$ определено только с точностью до знака, но k определено рационально через производные первых двух порядков от $F(t)$. Два вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$ определены тоже с точностью до знака (второй вполне определяется выбором первого); что касается вектора $\mathbf{e}_2$, то он определяется без двойного знака.

Как только трехгранник Френе определен, дело геометра — установить геометрическое значение его векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ значение псевдодуги и кривизны. Но ясно, что знание формул Френе окажет существенную помощь в этом чисто геометрическом исследовании: оно подскажет интерпретации, которые нельзя было предвидеть.

11. Примеры. Кривая в геометрии подобий. Прежде чем приступить к систематическому исследованию метода подвижного репера, рассмотрим еще несколько примеров из области евклидовой геометрии в собственном смысле этого слова.

Можно поставить себе задачей изучение свойств кривых, которые не только не зависят от их положения в пространстве, но и не меняются при подобном преобразовании. С этой точки зрения две подобные фигуры должны рассматриваться как равные. Ясно, что два прямоугольных трехгранника, построенных на трех векторах одной и той же длины, надо рассматривать как равные, даже если длина векторов первого трехгранника не такая же самая, как длина векторов второго. Переход от одного прямоугольного трехгранника к другому, бесконечно близкому, происходит тогда посредством переноса и бесконечно малого вращения вместе с подобным преобразованием с коэффициентом подобия, близким к единице. Необходимы семь величин вместо шести, чтобы определить аналитически этот новый вид перемещения, и новые формулы имеют вид:

$$d\mathbf{M} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega\mathbf{e}_1 + \omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega_{21}\mathbf{e}_1 + \omega\mathbf{e}_2 + \omega_{23}\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_3 = \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2 + \omega\mathbf{e}_3,$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты переноса, $\omega_{23} = -\omega_{32}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$ — компоненты вращения и $1 + \omega$ — коэффициент подобия.

Если дана кривая в пространстве, мы не заметим непосредственно вектора $\mathbf{e}_1$ среди векторов различной длины, касательных к кривой; и действительно, ограничиваясь элементами первого порядка, мы не имеем никакого основания выбрать один вектор, касательный к кривой, преимущественно перед другим. Существует, однако, единица длины, которую можно присоединить внутренним образом к каждой точке M кривой, это — длина радиуса кривизны в этой точке. Искомый трехгранник, таким образом, вполне определен из геометрических соображений. Обозначая через **T**, **N**, **B** еди-

ничные векторы обычного трехгранника Френе, через $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{\tau}$ — кривизну и кручение, принимаем

$$\mathbf{e}_1 = \rho\mathbf{T}, \quad \mathbf{e}_2 = \rho\mathbf{N}, \quad \mathbf{e}_3 = \rho\mathbf{B},$$

и формулы Френе будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{M} &= \frac{ds}{\rho}\mathbf{e}_1,\\
d\mathbf{e}_1 &= \frac{d\rho}{\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{ds}{\rho}\mathbf{e}_2,\\
d\mathbf{e}_2 &= -\frac{ds}{\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{d\rho}{\rho}\mathbf{e}_2 + \frac{ds}{\tau}\mathbf{e}_3,\\
d\mathbf{e}_3 &= -\frac{ds}{\tau}\mathbf{e}_2 + \frac{d\rho}{\rho}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Новый натуральный параметр определяется формулой

$$d\sigma = \frac{ds}{\rho}, \tag{7}$$

и мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{M}}{d\sigma} &= \mathbf{e}_1,\\
\frac{d\mathbf{e}_1}{d\sigma} &= k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\\
\frac{d\mathbf{e}_2}{d\sigma} &= -\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3,\\
\frac{d\mathbf{e}_3}{d\sigma} &= -h\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

с двумя *основными инвариантами*

$$k = \frac{d\rho}{ds}, \quad h = \frac{\rho}{\tau}. \tag{9}$$

Две кривые, у которых k и h — одни и те же функции σ, *равны* в смысле геометрии подобий, т. е. в обычном смысле слова подобны.

12. Плоская кривая в аффинной геометрии. Возьмем теперь пример, еще более удаленный от обычной евклидовой геометрии. Рассмотрим свойства плоских кривых, инвариант-

ные по отношению к аффинным унимодулярным преобразованиям, т. е. по отношению к преобразованиям, определяемым в декартовых координатах формулами вида

$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = a'x + b'y + c',$$

при условии

$$ab' - ba' = 1.$$

Системы отнесения, или *реперы,* которые станут теперь на место прямоугольных трехгранников, являются системами декартовых координат, определенными двумя векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ с единственным условием, чтобы построенный на этих двух векторах параллелограмм имел заданную площадь, которая будет служить единицей площади.

Будем называть *перемещением* аффинное унимодулярное преобразование. Для бесконечно малого перемещения репера с началом M мы будем иметь формулы:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1{}^1\mathbf{e}_1 + \omega_1{}^2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2{}^1\mathbf{e}_1 + \omega_2{}^2\mathbf{e}_2, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а условие на площадь параллелограмма $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ дает:

$$\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 = 0. \tag{11}$$

Рассматриваемое бесконечно малое перемещение по отношению к подвижному реперу имеет пять компонент ω^1, ω^2, $\omega_1{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^1$.

Можно доказать, что если два семейства подвижных реперов соответствуют так, что их компоненты ω^i и $\omega_i{}^j$ равны, то можно перейти от одного семейства к другому определенным аффинным унимодулярным преобразованием.

Заметив это, допустим, что выбрана неподвижная система отнесения, и пусть x и y — координаты точки плоской кривой, которая, допустим для простоты, дана своим уравнением $y=f(x)$. Присоединим ко всякой точке ее *репер первого порядка* с вектором $\mathbf{e}_1$, касательным к кривой. Компоненты двух векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ примут вид:

$$\text{для } \mathbf{e}_1 : \alpha, \ \alpha y';$$

$$\text{для } \mathbf{e}_2 : \beta, \ \beta y' + \frac{1}{\alpha}.$$

Подсчет компонент ω^i и ω_i^j производится без затруднения при помощи уравнений (10) и дает

$$\omega^2 = 0, \ \omega^1 = \frac{dx}{\alpha}, \ \omega_1^{\ 2} = \alpha^2 y'' dx,$$

$$\omega_1^{\ 1} = \frac{d\alpha}{\alpha} - \alpha\beta y'' dx, \quad \omega_2^{\ 1} = \frac{d\beta}{\alpha} + \beta \frac{d\alpha}{\alpha^2} - \beta^2 y'' dx.$$

Мы получим реперы второго порядка, приравнивая единице отношение $\frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega^1}$ (что предполагает $y'' \neq 0$). Эти реперы зависят от одного только параметра β. Имеем

$$\alpha = (y'')^{-\frac{1}{3}};$$

более того, ω^1 вполне определено и дает дифференциал аффинной дуги $d\sigma$:

$$d\sigma = (y'')^{\frac{1}{3}} dx. \tag{12}$$

Для реперов второго порядка компонента ω_1^1 не зависит от дифференциала единственного вторичного параметра β; имеем

$$\omega_1^{\ 1} = \left\{ -\frac{1}{3} \frac{y'''}{y''} - \beta (y'')^{\frac{2}{3}} \right\} dx.$$

Репер третьего порядка получается обращением в нуль ω_1^1, что дает

$$\beta = -\frac{1}{3} (y'')^{-\frac{5}{3}} y''' = \frac{1}{2} \left\{ (y'')^{-\frac{2}{3}} \right\}'.$$

Для репера третьего порядка, искомого, окончательного, имеем:

$$\omega_2^{\ 1} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z'' dx = \frac{1}{2} z'' d\sigma = k d\sigma,$$

где

$$z = (y'')^{-\frac{2}{3}}.$$

Итак, формулы Френе имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{d\sigma} &= \mathbf{e}_1, \\ \frac{d\mathbf{e}_1}{d\sigma} &= \mathbf{e}_2, \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{d\sigma} &= k\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Дифференциальный инвариант k есть *аффинная кривизна.* Кривые второго порядка характеризуются постоянной аффинной кривизной согласно дифференциальному уравнению их:

$$\left\{(y'')^{-\frac{2}{3}}\right\}''' = 0,$$

которое с точностью до формы принадлежит Монжу.

В действительности имеются три возможных выбора репера; если j означает какой-нибудь кубический корень из единицы, то можно изменить соответственно

$$d\sigma,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ k$$

на

$$jd\sigma,\ j^2\mathbf{e}_1,\ j\mathbf{e}_2,\ jk.$$

Чтобы две кривые были равны, т. е. получались друг из друга некоторым аффинным унимодулярным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы k^3 имело одно и то же постоянное значение для обеих кривых или же, чтобы $\frac{dk}{d\sigma}$ было для обеих кривых одной и той же функцией от k^3.

IV. МЕТОД ПРИВЕДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

13. Плоская кривая в аффинной геометрии. Отметим теперь другой метод, достаточно быстрый в известных случаях если не для того, чтобы получить явно дифференциальные инварианты и подвижной репер, присоединенные к изучаемому многообразию, то, по крайней мере, для того, чтобы получить формулы Френе. Этот новый способ использует метод *приведенных уравнений,* систематически развитый Трессом (*Tresse*) для отыскания дифференциальных инвариантов. Мы ограничимся тем, что покажем его на двух частных примерах.

Первый из этих примеров — тот же, что мы рассматривали в предыдущем пункте.

Присоединим к произвольной точке M какой-либо плоской кривой систему декартовых координат с началом в M так, чтобы уравнение кривой в окрестности точки M было насколько возможно просто. Мы ограничим координатные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ условием, чтобы определяемый ими параллелограмм имел площадь, равную единице. Выбирая первую ось касательной к кривой, мы получим уравнение кривой, которую будем предполагать аналитической, в виде

$$y = \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \ldots$$

Можно умножить x и y на множители λ и $\frac{1}{\lambda}$; это соответствует дозволенному нашими условиями преобразованию координат и приведет коэффициент a_2 к единице. Полагая затем

$$x = X + \mu Y, \quad y = Y,$$

что тоже допустимо, легко обнаружить, что можно обратить коэффициент a_3 в нуль.

Таким образом, приходим к *приведенному уравнению*, которое мы будем писать в виде

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k x^4 + \ldots \tag{14}$$

Если рассматривать точку M', бесконечно близкую к M, то ее абсцисса x является величиной, внутренним образом связанной с дугой кривой MM'. Мы можем назвать ее элементом *аффинной дуги*. Выбирая на кривой начало, можно приписать каждой точке ее *аффинную криволинейную абсциссу* σ, и коэффициенты $k, \ldots$ в приведенном уравнении будут определенными функциями абсциссы σ соответствующей точки M.

Перемещаясь по кривой, мы, очевидно, будем иметь:

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\sigma} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{d\sigma} = p_1^1 \mathbf{e}_1 + p_1^2 \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{d\sigma} = p_2^1 \mathbf{e}_1 - p_1^1 \mathbf{e}_2.$$

Все сводится к определению неизвестных коэффициентов $p_1^1, \ p_1^2, \ p_2^1$.

Рассмотрим для этого на кривой *неподвижную* точку P; обозначим через x, y ее координаты относительно репера в точке M с абсциссой σ; это — функции от σ, удовлетворяющие некоторым дифференциальным уравнениям, которые нетрудно составить.

Действительно, достаточно выразить, что точка $\mathbf{M} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ неподвижна; это даст

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{d\sigma} + 1 + p_1{}^1 x + p_2{}^1 y = 0, \\ &\frac{dy}{d\sigma} + p_1{}^2 x - p_1{}^1 y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

С другой стороны, координаты x и y удовлетворяют соотношению

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k(\sigma) x^4 + \ldots = f(x, \sigma). \tag{14}$$

Отсюда, путем дифференцирования с помощью формул (15) получаем

$$-p_1{}^2 x + p_1{}^1 f(x, \sigma) = f'_x[-1 - p_1{}^1 x - p_2{}^1 f(x, \sigma)] + f'_\sigma. \tag{16}$$

Это соотношение должно иметь место при всяком σ и для любой закрепленной точки P на кривой; следовательно, это *тождество* относительно x и σ. Мы можем приравнять коэффициенты при различных степенях x в обеих частях уравнения (16), которое мы перепишем, развертывая, в виде:

$$\begin{gathered} -p_1{}^2 x + p_1{}^1\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} k x^4 + \ldots\right) = \\ = \left(x - \frac{1}{2} k x^3 + \ldots\right)\left(-1 - p_1{}^1 x - \frac{1}{2} p_2{}^1 x^2 + \ldots\right) - \\ - \frac{1}{8} k' x^4 + \ldots \end{gathered} \tag{16'}$$

Последовательно получаем:

$$-p_1{}^2 = -1,$$

$$\frac{1}{2} p_1{}^1 = -p_1{}^1,$$

$$0 = -\frac{1}{2} p_2{}^1 + \frac{1}{2} k,$$

откуда

$$p_1{}^2 = 1, \quad p_1{}^1 = 0, \quad p_2{}^1 = k.$$

Мы находим, таким образом, уже раз полученные формулы Френе (13) и, продолжая сравнивать коэффициенты, будем иметь в функциях аффинной кривизны и ее последовательных производных коэффициенты разложения y по степеням x. Это подтверждает уже раз сказанное: кривая вполне определена, с точностью до унимодулярного аффинитета, заданием k как функции σ.

14. Мнимая поверхность, обладающая двойным семейством минимальных линий кривизны. Мы применим этот метод еще к одной проблеме евклидовой геометрии. Рассмотрим мнимую аналитическую поверхность, которая не является развертывающейся минимальной поверхностью, но у которой вторая основная форма имеет один и только один линейный множитель, общий с первой основной формой, так что поверхность допускает сдвоенное семейство минимальных линий кривизны. Мы воспользуемся здесь тем же самым трехгранником, что и в теории минимальных кривых, с двумя изотропными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$, касательными к поверхности, и с единичным вектором $\mathbf{e}_2$, нормальным к ней.

Приведенное уравнение поверхности будет иметь вид

$$y = \frac{1}{2} ax^2 + bxz + \dots$$

Так как x и z можно умножить соответственно на λ и $\frac{1}{\lambda}$, то коэффициент a приводится к единице, и мы напишем

$$y = \frac{1}{2} x^2 + kxz + \frac{1}{6} \alpha x^3 + \frac{1}{2} \beta x^2 z + \frac{1}{2} \gamma x z^2 + \frac{1}{6} \delta z^3 + \dots \tag{17}$$

Если рассматривать точку M', бесконечно близкую к M, то бесконечно малые величины x и z будут внутренне связаны с этой парой точек: это будут компоненты ω^1 и ω^3 бесконечно малого перемещения подвижного трехгранника. Положим, как в п. **8**,

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1{}^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1{}^2 \mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_3{}^2 \mathbf{e}_1 - \omega_1{}^2 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3{}^2 \mathbf{e}_2 - \omega_1{}^1 \mathbf{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Координаты x, y, z неподвижной точки P поверхности, отнесенной к трехграннику с вершиной M, удовлетворяют уравнению (17), где k, α, β, ... зависят от положения точки M, и дифференциальным уравнениям, которые выражают, что точка P неподвижна, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &dx + \omega^1 + x\omega_1{}^1 - y\omega_3{}^2 = 0,\\ &dy \qquad + x\omega_1{}^2 + z\omega_3{}^2 = 0,\\ &dz + \omega^3 - y\omega_1{}^2 - z\omega_1{}^1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Отсюда получается, как в предыдущем примере, что

$$\begin{gathered} -x\omega_1{}^2 - z\omega_3{}^2 = \left(x + kz + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xz + \frac{1}{2}\gamma z^2 + \ldots\right)\times \\ \times\left[-\omega^1 - x\omega_1{}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + kxz + \ldots\right)\omega_3{}^2\right] + \\ + \left(kx + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma xz + \frac{1}{2}\delta z^2 + \ldots\right)\cdot\left[-\omega^3 + z\omega_1{}^1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}x^2 + kxz + \ldots\right)\omega_1{}^2\right] + xzdk + \frac{1}{6}x^3 d\alpha + \\ + \frac{1}{2}x^2 z d\beta + \frac{1}{2}xz^2 d\gamma + \frac{1}{6}z^3 d\delta + \ldots \end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты, находим последовательно:

$$\begin{gathered} -x\omega_1{}^2 - z\omega_3{}^2 = -(x + kz)\,\omega^1 - kx\omega^3, \\ 0 = -x(x + kz)\,\omega_1^1 - \left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xz + \frac{1}{2}\gamma z^2\right)\omega^1 + \\ + kxz\omega_1{}^1 - \left(\frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma xz + \frac{1}{2}\delta z^2\right)\omega^3 + xzdk, \end{gathered}$$

откуда

$$\left.\begin{gathered} \omega_1{}^2 = \omega^1 + k\omega^3, \quad \omega_3{}^2 = k\omega^1, \quad \omega_1{}^1 = -\frac{1}{2}\alpha\omega^1 - \frac{1}{2}\beta\omega^3, \\ \gamma = \delta = 0, \quad dk = \beta\omega^1. \end{gathered}\right\} \tag{20}$$

Мы видим, что члены третьего порядка в разложении y не произвольны. Это объясняется тем, что минимальные линии кривизны, которые в то же самое время являются

асимптотическими, — прямые. Действительно, мы получим их, полагая $\omega^1 = 0$; вектор $\mathbf{e}_3$ касателен к ним, а при перемещении вдоль одной из этих линий мы увидим, что и $d\mathbf{e}_3$ тоже касается ее; это показывает, что линия имеет неподвижную касательную.

Дифференциальный инвариант k (второго порядка) является единственной главной кривизной поверхности; полная кривизна ее равна k^2. Из дифференциальных инвариантов α и β можно вывести последовательными дифференцированиями все остальные дифференциальные инварианты поверхности, полагая:

$$d\alpha = \alpha_1\omega^1 + \alpha_3\omega^3,$$

$$d\beta = \beta_1\omega^1 + \beta_3\omega^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots;$$

коэффициенты α_1, α_2, β_1, $\beta_2, \ldots$ — искомые дифференциальные инварианты.

Несмотря на все результаты, полученные методом приведенных уравнений, мы все еще не знаем кое-чего существенного, например: не существуют ли между найденными дифференциальными инвариантами необходимые соотношения и можно ли произвольно задать эти соотношения, конечно, между α, β и k и т. д.

Чтобы разрешить все эти вопросы, необходимо принять во внимание условия совместности, которым должны удовлетворять компоненты бесконечно малого перемещения подвижного трехгранника, зависящего от *нескольких* параметров. Скоро мы найдем эти условия в совершенно общей форме и увидим, что они содержат в себе все существо дифференциальной геометрии.

Удовлетворимся в настоящий момент замечанием, что выражения ω^1 и ω^3 вообще не являются точными дифференциалами и что, следовательно, нельзя приписать поверхности систему двух натуральных параметров σ_1 и σ_2 аналогично натуральному параметру σ, который мы вводили каждый раз, когда имели дело с кривой.

V. ПОНЯТИЕ РЕПЕРА В ГЕОМЕТРИИ ДАННОЙ ГРУППЫ

15. Общая теория подвижного репера. Геометрия группы преобразований. Пора теперь приступить к общей теории подвижного репера, связав ее с основными принципами теории непрерывных групп.

Известно, что по идее Ф. Клейна (*F. Klein*) каждой непрерывной группе G с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует в пространстве n измерений геометрия, имеющая объектом изучения свойства фигур, инвариантные относительно преобразований группы. Таким образом, элементарная геометрия соответствует группе перемещений, аффинная геометрия — группе аффинных преобразований, проективная геометрия — группе проективных преобразований. Группа G иногда называется *фундаментальной группой геометрии,* или *фундаментальной группой пространства,* в котором изучаются инвариантные относительно группы свойства фигур.

Мы будем предполагать в последующем, что группа *конечна,* т. е. что общее преобразование ее зависит от конечного числа параметров. Мы предположим также для простоты, что преобразованные переменные являются *аналитическими* функциями от первоначальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Наконец, мы будем предполагать группу *транзитивной;* это значит, что всегда существует по крайней мере одно преобразование группы, приводящее в совпадение две произвольно данные точки пространства. Будем по аналогии называть преобразование группы *перемещением* и обозначать через S_a перемещение с параметрами $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

16. Требования, которым должен удовлетворять репер. Первый вопрос, который мы должны себе поставить: *что заменит в какой-нибудь геометрии Клейна понятие прямоугольного трехгранника обычной геометрии?*

Вспомним, что совокупность прямоугольных трехгранников обладает следующим свойством: *два произвольных прямоугольных трехгранника могут быть приведены в совпадение одним и только одним перемещением.* Легко заметить, что это свойство и является основным в приложениях метода подвижного трехгранника.

Заметив это, мы скажем, что *семейство фигур образует систему реперов, если две произвольные фигуры семейства можно привести в совпадение одним и только одним преобразованием группы G.*

В частности, ясно, что если удастся найти какую-либо фигуру (R_0), такую, что всякое нетождественное преобразование группы G переводит (R_0) в фигуру, отличную от (R_0), то совокупность этой фигуры (R_0) и всех тех фигур (R_a), которые получатся из нее различными преобразованиями S_a группы G, образует систему реперов.

Действительно, чтобы перевести (R_a) в (R_b), достаточно произвести над (R_a) последовательно преобразование S_a^{-1}, которое переведет (R_a) в (R_0), и затем S_b, которое переведет (R_0) в (R_b). Результирующее преобразование

$$S_c = S_b S_a^{-1}$$

будет тоже некоторым преобразованием S_c группы G, и это преобразование S_c переведет (R_a) в (R_b). Обратно, если $S_{c'}$ переводит (R_a) в (R_b), преобразование $S_b^{-1} S_{c'} S_a$ переводит последовательно (R_0) в (R_a), потом в (R_b), потом в (R_0); это, следовательно, тождественное преобразование, что и даст

$$S_{c'} S_a = S_b, \text{ или } S_{c'} = S_b S_a^{-1} = S_c.$$

Отыскание системы реперов сводится, следовательно, к отысканию фигуры (R_0), неинвариантной ни при каком преобразовании группы G, отличном от тождественного.

17. Репер в аффинной и в проективной геометрии n измерений. Есть случаи, когда выбор репера представляется совершенно естественным. Например, в общей аффинной геометрии n измерений естественно принять в качестве репера фигуру, состоящую из точки и n векторов, из нее выходящих и не расположенных в одной гиперплоскости.

В проективной геометрии n измерений фигура, образованная $n+2$ точками, тоже может служить репером; но удобнее взять фигуру, состоящую из $n+1$ *аналитических* точек, называя аналитической точкой совокупность $n+1$ чисел, не равных одновременно нулю. Если даны $n+1$ *линейно независимых* аналитических точек $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n+1}$, то всякая аналитическая точка может быть одним и только одним способом представлена в виде

$$\mathbf{M} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \ldots + x_{n+1}\mathbf{A}_{n+1}.$$

Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ можно рассматривать как однородные координаты геометрической точки, которую можно присоединить к $\mathbf{M}$ и ко всем аналитическим точкам вида $\lambda\mathbf{M}$. Но надо заметить, что, как репер в собственном смысле, упорядоченная совокупность $n+1$ аналитических точек $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n+1})$ не отличается от совокупности $n+1$ аналитических точек $(m\mathbf{A}_1, m\mathbf{A}_2, \ldots, m\mathbf{A}_{n+1})$.

18. Построение системы реперов в произвольной геометрии. Вернемся к произвольной группе G. Если группа односвязна, т. е. существует только одно преобразование группы,

приводящее в совпадение две произвольно заданные точки, то уже сами точки пространства представляют совокупность реперов.

Допустим, что группа не односвязна; это значит, что порядок группы r больше числа переменных n. Начнем с произвольной точки A_0; по предположению, существует бесконечное множество преобразований G, оставляющих ее неподвижной; они образуют подгруппу g_1, зависящую от $r_1=r-n$ параметров.

Существуют, конечно, точки, неинвариантные относительно g_1; пусть B_0 — одна из этих точек. Преобразования группы g_1, оставляющие неподвижной точку B_0, образуют подгруппу g_2 порядка $r_2<r_1$. Если r_2 положительно, то существуют, конечно, точки, неинвариантные относительно g_2; пусть C_0 — одна из этих точек. Преобразования группы g_2, оставляющие неподвижной точку C_0, образуют подгруппу g_3 порядка $r_3<r_2$. Если r_3 — нуль, т. е. если g_3 сводится к тождественному преобразованию, то фигура, состоящая из трех точек A_0, B_0, C_0, может служить начальным репером (R_0); в противном случае мы продолжаем тот же самый процесс, который, несомненно, придет к концу, ибо порядки последовательных подгрупп $g_1, g_2, \ldots$ все время убывают.

Итак, всегда можно найти систему реперов, каждый из которых состоит из конечного числа точек, расположенных в известном порядке.

Нет надобности говорить, что существует бесконечное множество других систем реперов. Заметим, что в евклидовой геометрии прямой трехгранник тоже можно уподобить фигуре, образованной четырьмя точками: вершиной трехгранника и концами трех единичных векторов, отложенных на его осях.

19. Репер как система координат. В евклидовой геометрии прямой трехгранник служит системой координат. В общем случае дело обстоит совершенно так же. Действительно, присоединим к какому-нибудь частному реперу (R_0), который мы будем называть начальным, первоначально заданную систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть (R_a) — какой-нибудь репер, M — произвольная точка пространства и M' — точка, полученная из M перемещением S_a^{-1}, которое переводит (R_a) в (R_0).

Условимся называть начальные координаты M' *относительными координатами точки M в репере (R_a)*. Мы видим, что фигура, состоящая из репера (R) и точки M, и фигура, образованная репером (R') и точкой M', *равны*, если коор-

динаты M по отношению к реперу (R) равны координатам M' по отношению к реперу (R').

Если мы воспользуемся вместо первоначальных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительными координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в репере (R_a), то уравнения, аналитически определяющие преобразования группы G, будут иметь в точности ту же форму, что и раньше. Действительно, пусть S_b — какое-нибудь преобразование группы G и пусть M_b — точка, полученная из M посредством S_b. С другой стороны, пусть M' и M'_b — точки, полученные из M и M_b посредством S_a^{-1}. Начальными координатами точек M' и M'_b являются координаты ξ точек M и M_b. Но мы переходим от M' к M'_b последовательными преобразованиями S_a, S_b, S_a^{-1}; следовательно, аналитически мы переходим от координат ξ точки M к координатам ξ' преобразованной точки M_b посредством преобразования $S_a^{-1} S_b \ S_a$, и это есть преобразование группы. Но следует заметить, что параметры, фигурирующие в уравнении этого преобразования $(\xi_i \to \xi'_i)$, — уже не параметры b_i преобразования S_b, а параметры преобразования $S_a^{-1} \ S_b \ S_a$, которое называется *сопряженным к* S_b *посредством* S_a.

Необходимо, следовательно, различать S_a как *геометрическую* операцию и S_a — как операцию *аналитическую*. *Геометрическое* преобразование S_a аналитически представлено *аналитическим* преобразованием S_a только в том случае, если принята начальная система координат, связанная с репером (R_0).

20. Бесконечно малое перемещение репера. Мы переходим теперь к бесконечно малому преобразованию, которое приводит в совпадение два бесконечно близких репера (R_a) и (R_{a+da}). От (R_a) к (R_{a+da}) перейдем *геометрическим* преобразованием $S_{a+da} \ S_a^{-1}$, складывающимся из перемещения S_a^{-1}, которое переводит (R_a) в (R_0), и перемещения S_{a+da}, которое переводит (R_0) в (R_{a+da}). Если же мы захотим аналитически выразить это бесконечно малое перемещение *с помощью относительных координат в репере* (R_a), то следует сначала переместить фигуру, образованную двумя реперами, так, чтобы (R_a) перешел в (R_0); если при этом (R_ε) есть новое положение репера (R_{a+da}), то рассматриваемое бесконечно малое перемещение аналитически выражается посредством *аналитического* преобразования S_ε. Но от (R_0) к (R_ε) перейдем последовательными перемещениями S_{a+da} и S_a^{-1}. *Следовательно, относительными параметрами беско-*

нечно малого перемещения, которое переводит (R_a) *в* (R_{a+da}), *являются параметры бесконечно малого аналитического преобразования* $S_\varepsilon = S_a^{-1} S_{a+da}$.

Предположим, что тождественное преобразование соответствует нулевым значениям параметров; тогда относительными компонентами ε_i бесконечно малого перемещения репера будут бесконечно малые величины, очевидно, линейные по отношению к da_i, с коэффициентами, зависящими от a_i. Мы их будем обозначать символами $\omega_i(a, da)$:

$$\omega_i(a, da) = \alpha_{i1}(a)\,da_1 + \alpha_{i2}(a)\,da_2 + \ldots + \alpha_{ir}(a)\,da_r. \qquad (21)$$

Полученный результат составляет, с известной точки зрения, первую основную теорему теории групп Софуса Ли. В самом деле, он выражает, что, если преобразования S_a, по предположению зависящие от r параметров, образуют группу, бесконечно малое преобразование $S_a^{-1}\ S_{a+da}$ зависит только от r параметров ω_i (a, da), а не от $2r$. Эта теорема допускает обращение, но мы оставим это в стороне.

21. Образование компонент этих перемещений по заданным уравнениям конечного преобразования группы. Легко получить выражения ω_i, если известны конечные уравнения группы G:

$$x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Сначала можно образовать бесконечно малые преобразования группы, давая параметрам a_i бесконечно малые значения ε_i, что даст:

$$x'_i = x_i + \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_k}\right)_0 \varepsilon_k = x_i + \sum_k \varepsilon_k \xi_{ki}(x),$$

если пренебречь бесконечно малыми второго порядка относительно ε_i.

Чтобы получить *аналитическое* преобразование $S_a^{-1}\ S_{a+da}$, посмотрим теперь, что получится в результате применения двух преобразований

$$x'_i = f_i(x;\ a + da) \text{ и } x'_i = f_i(x'', a);$$

переменные x''_i получаются из x_i посредством искомого преобразования. Полагая

$$x''_i = x_i + \delta x_i$$

и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, непосредственно находим

$$\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j. \tag{22}$$

Эти уравнения, если их решить относительно δx_j, должны иметь вид:

$$\delta x_i = \sum_k \omega_k (a;\ da)\, \xi_{ki}(x).$$

Возьмем, например, группу евклидовых перемещений. Уравнения перемещения в прямоугольных координатах имеют вид:

$$x' = x_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$y' = y_0 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$z' = z_0 + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Здесь шесть независимых бесконечно малых преобразований, которые можно выразить формулами:

$$\delta x = \varepsilon_1 + \varepsilon_5 z - \varepsilon_6 y,$$
$$\delta y = \varepsilon_2 + \varepsilon_6 x - \varepsilon_4 z,$$
$$\delta z = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 y - \varepsilon_5 x.$$

Заметив это, переходим к разрешению уравнений (22), которые напишутся здесь в виде:

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = dx_0 + x\, d\alpha + y\, d\beta + z\, d\gamma,$$
$$\alpha'\delta x + \beta'\delta y + \gamma'\delta z = dy_0 + x\, d\alpha' + y\, d\beta' + z\, d\gamma',$$
$$\alpha''\delta x + \beta''\delta y + \gamma''\delta z = dz_0 + x\, d\alpha'' + y\, d\beta'' + z\, d\gamma''.$$

Они дадут, если воспользоваться соотношениями между девятью направляющими косинусами прямой:

$$\delta x = (\alpha\, dx_0 + \alpha'\, dy_0 + \alpha''\, dz_0) +$$
$$+ (\alpha\, d\gamma + \alpha'\, d\gamma' + \alpha''\, d\gamma'')\, z - (\beta\, d\alpha + \beta'\, d\alpha' + \beta''\, d\alpha'')\, y,$$
$$\delta y = (\beta\, dx_0 + \beta'\, dy_0 + \beta''\, dz_0) +$$
$$+ (\beta\, d\alpha + \beta'\, d\alpha' + \beta''\, d\alpha'')\, x - (\gamma\, d\beta + \gamma'\, d\beta' + \gamma''\, d\beta'')\, z,$$

$$\delta z = (\gamma\, dx_0 + \gamma'\, dy_0 + \gamma''\, dz_0) +$$
$$+ (\gamma\, d\beta + \gamma'\, d\beta' + \gamma''\, d\beta'')\, y - (\alpha\, d\gamma + \alpha'\, d\gamma' + \alpha''\, d\gamma'')\, x.$$

Получим, конечно, уравнение того типа, который мы предвидели, причем ω_i имеют вид:

$$\omega_1 = \alpha\, dx_0 + \alpha'\, dy_0 + \alpha''\, dz_0,$$
$$\omega_2 = \beta\, dx_0 + \beta'\, dy_0 + \beta''\, dz_0,$$
$$\omega_3 = \gamma\, dx_0 + \gamma'\, dy_0 + \gamma''\, dz_0,$$
$$\omega_4 = \gamma\, d\beta + \gamma'\, d\beta' + \gamma''\, d\beta'' = -(\beta\, d\gamma + \beta'\, d\gamma' + \beta''\, d\gamma''),$$
$$\omega_5 = \alpha\, d\gamma + \alpha'\, d\gamma' + \alpha''\, d\gamma'' = -(\gamma\, d\alpha + \gamma'\, d\alpha' + \gamma''\, d\alpha''),$$
$$\omega_6 = \beta\, d\alpha + \beta'\, d\alpha' + \beta''\, d\alpha'' = -(\alpha\, d\beta + \alpha'\, d\beta' + \alpha''\, d\beta'').$$

Сделаем здесь важное замечание: r относительных компонент бесконечно малого перемещения репера ω_i определены только с точностью до линейной подстановки с *постоянными* коэффициентами. Впрочем, легко доказать, что они линейно независимы, если только r параметров группы существенны.

22. Основная теорема: компоненты бесконечно малого перемещения репера внутренним образом определяют многообразие. Вот еще существенное замечание. Допустим, что к двум реперам (R_a) и (R_{a+da}) применяется одно и то же перемещение S_c; *относительные компоненты бесконечно малого перемещения, совмещающего два бесконечно близких репера, не изменятся.* Это легко показать аналитически, ибо после замены S_a на $S_c\, S_a$ и S_{a+da} на $S_c\, S_{a+da}$ преобразование $S_a^{-1}\, S_{a+da}$ заменится на преобразование

$$(S_c S_a)^{-1}\,(S_c S_{a+da}) = S_a^{-1} S_c^{-1} S_c S_{a+da} = S_a^{-1} S_{a+da}$$

и, следовательно, не изменится.

Обратное предложение является основным. Допустим, что имеются два непрерывных семейства реперов (R_u) и (R_v), которые зависят от одного и того же числа p параметров $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и $v_1, v_2, \ldots, v_p$. При этом допустим, что можно установить взаимно однозначное соответствие между реперами этих двух семейств так, что относительные компоненты $\omega_i\,(u,\, du)$ бесконечно малого перемещения репера первого семейства будут равны соответственным относительным компонентам $\omega_i\,(v,\, dv)$ второго семейства. Я утверждаю, что тогда существует перемещение, приводящее в совпадение

одновременно все реперы первого семейства с соответствующими реперами второго.

Доказательство просто. Действительно, обозначим через S_u и S_v перемещения, переводящие (R_0) соответственно в (R_u) и (R_v). Имеем:

$$S_u^{-1} S_{u+du} = S_v^{-1} S_{v+dv},$$

или

$$S_v S_u^{-1} = S_{v+dv} S_{u+du}^{-1}.$$

Простое рассуждение показывает тогда, что преобразование $S_v S_u^{-1}$ является *фиксированным* преобразованием S_c из G. Следовательно,

$$S_v = S_c S_u;$$

это доказывает, что репер (R_v) получается из репера (R_u) одним определенным перемещением S_c.

Мы имеем, таким образом, обобщение основной теоремы метода подвижного трехгранника.

VI. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ДАРБУ — МАУРЕРА — КАРТАНА

23. Условия совместности компонент бесконечно малого перемещения репера. Уравнения структуры группы. Переходим теперь к условиям совместности, которым должны удовлетворять относительные компоненты бесконечно малого перемещения подвижного репера, зависящего от нескольких параметров. Они хорошо известны в теории поверхностей, изучаемых методом подвижного трехгранника, где движение трехгранника зависит от двух параметров.

Предпошлем отысканию этих условий очень простое замечание аналитического порядка.

Если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ линейно независимы по отношению к $da_1, da_2, \ldots, da_r$, то можно обратно выразить всякую дифференциальную форму, линейную относительно $da_1, da_2, \ldots, da_r$, как линейную форму от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

Заметив это, рассмотрим сначала совокупность всех реперов пространства, которые зависят от r параметров a_i. Введем два символа дифференцирования d и δ, перестановочные между собой, и выражения

$$d\omega_s(a;\ \delta a) - \delta\omega_s(a;\ da),$$

которые представляют не что иное, как билинейные коварианты форм ω_s; как известно, это — выражения билинейные,

альтернированные по отношению к двум сериям переменных da_i и δa_i:

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial a_i} - \frac{\partial a_{si}}{\partial a_j}\right) da_i\, \delta a_j.$$

Если мы подставим вместо переменных da_i переменные $\omega_i(d)$ и вместо δa_i переменные $\omega_i(\delta)$, мы получим опять билинейную, альтернированную относительно двух новых серий переменных форму, так что можно написать

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j} c_{ijs}\omega_i(d)\,\omega_j(\delta), \quad (c_{ijs} + c_{jis} = 0), \qquad (23)$$

где c_{ijs} — *a priori* определенные функции от $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

По отношению к этим коэффициентам c_{ijs} мы имеем следующую основную теорему, которая представляет с известной точки зрения вторую основную теорему теории групп Ли: *коэффициенты c_{ijs} в соотношениях* (23) — *абсолютные постоянные.*

Доказывается эта теорема непосредственно. Подвергнем различные реперы (R_a) одному и тому же определенному перемещению S_c; мы уже заметили ранее, что это не изменит относительных компонент ω_i бесконечно малого перемещения репера. В формулах (23) левые части так же, как величины $\omega_i(d)$ и $\omega_j(\delta)$ в правых частях, не изменяются. Это возможно только в том случае, если коэффициенты c_{ijs} имеют одно и то же числовое значение для репера (R_a) и для репера $(R_{a'})$, полученного из (R_a) перемещением S_c. Но всегда можно перейти с помощью подходящего перемещения от произвольного репера (R_a) к другому произвольному реперу $(R_{a'})$, и это требует, чтобы коэффициенты c_{ijs} были абсолютными постоянными.

Эти постоянные называются *структурными константами* * группы, а уравнения (23) — *уравнениями структуры* группы.

Можно написать их в форме, несколько менее сжатой, если принять d за символ дифференцирования по отношению к одному параметру a_k и δ — за символ дифференцирования по отношению к другому параметру a_h. Если еще ввести

* В теории Софуса Ли эти константы вводятся совершенно другим способом. Если обозначить через $\varepsilon_1 X_1 f + \ldots + \varepsilon_r X_r f$ общее бесконечно малое преобразование группы, то

$$(X_i X_j) f = \sum c_{ijs} X_s f.$$

функции α_{si} из формул (21), то уравнения структуры примут вид:

$$\frac{\partial a_{sh}}{\partial a_k} - \frac{\partial a_{sk}}{\partial a_h} = \sum_{i,j} c_{ijs}\alpha_{ik}\alpha_{jh}. \tag{24}$$

Давая указателям s, k, h все возможные значения, получаем в явном виде искомые условия совместности.

С другой стороны, можно написать уравнения структуры (23) в еще более сжатой форме.

В самом деле, заметим, что, соединяя в правой части два члена, соответствующие одному и тому же *сочетанию* (i,j) указателей i и j, получим

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i<j} c_{ijs} \begin{vmatrix} \omega_i(d) & \omega_j(d) \\ \omega_i(\delta) & \omega_j(\delta) \end{vmatrix}; \tag{25}$$

это можно записать в символической форме:

$$\omega_s' = \sum_{i<j} c_{ijs}[\omega_i\omega_j]. \tag{25'}$$

Мы видим, что символ $[\omega_i\omega_j]$ занимает место определителя и что, следовательно, символ $[\omega_j\omega_i]$ следует рассматривать как равный с обратным знаком символу $[\omega_i\omega_j]$.

24. Случай евклидовой геометрии. Уравнения Дарбу. Мы доказали *a priori* существование уравнений структуры с постоянными коэффициентами c_{ijs}. Вполне очевидно, что может существовать только одна система соотношений этого рода.

В евклидовой геометрии их можно получить и не составляя в действительности выражений ω_i, например так, как мы это сделали в п. **21**. Достаточно отправиться от уравнений

$$d\mathbf{M} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_{12}\mathbf{e}_2 - \omega_{31}\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega_{23}\mathbf{e}_3 - \omega_{12}\mathbf{e}_1,$$

$$d\mathbf{e}_3 = \omega_{31}\mathbf{e}_1 - \omega_{23}\mathbf{e}_2,$$

где ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} — скалярные произведения $\mathbf{e}_3\,d\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\,d\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\,d\mathbf{e}_1$, и, следовательно, они тождественны с компонентами, которые мы обозначили через ω_4, ω_5, ω_6.

Если мы выразим, что $d\delta\mathbf{M}$, $d\delta\mathbf{e}_1$, $d\delta\mathbf{e}_2$, $d\delta\mathbf{e}_3$ соответственно равны $\delta d\mathbf{M}$, $\delta d\mathbf{e}_1$, $\delta d\mathbf{e}_2$, $\delta d\mathbf{e}_3$, мы получим, приравнивая попарно коэффициенты при $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в точности искомые уравнения структуры. Это даст

$$\left.\begin{aligned}
d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) &= \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) &= \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_3(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_3(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_3(\delta) - \delta\omega_3(d) &= \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{23}(\delta) - \delta\omega_{23}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{12}(d) & \omega_{31}(d) \\ \omega_{12}(\delta) & \omega_{31}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{31}(\delta) - \delta\omega_{31}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{23}(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_{23}(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_{12}(\delta) - \delta\omega_{12}(d) &= \begin{vmatrix} \omega_{31}(d) & \omega_{23}(d) \\ \omega_{31}(\delta) & \omega_{23}(\delta) \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Классические формулы Дарбу для движения трехгранника с двумя степенями свободы получаются, если положить

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \xi\,du + \xi_1\,dv, \\
\omega_2 &= \eta\,du + \eta_1\,dv, \\
\omega_3 &= \zeta\,du + \zeta_1\,dv, \\
\omega_{23} &= p\,du + p_1\,dv, \\
\omega_{31} &= q\,du + q_1\,dv, \\
\omega_{12} &= r\,du + r_1\,dv
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

и принять d и δ за символы дифференцирования относительно u и v. Таким образом получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial u}-\frac{\partial \xi}{\partial v}&=\zeta q_1-q\zeta_1-\eta r_1+r\eta_1,\\
\frac{\partial \eta_1}{\partial u}-\frac{\partial \eta}{\partial v}&=\xi r_1-r\xi_1-\zeta p_1+p\zeta_1,\\
\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}-\frac{\partial \zeta}{\partial v}&=\eta p_1-p\eta_1-\xi q_1+q\xi_1,\\
\frac{\partial p_1}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial v}&=rq_1-qr_1,\\
\frac{\partial q_1}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial v}&=pr_1-rp_1,\\
\frac{\partial r_1}{\partial u}-\frac{\partial r}{\partial v}&=qp_1-pq_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Уравнения (24) в теории групп известны под названием *уравнений Маурера* (*Maurer*); Буль (*Buhl*) предложил назвать их *уравнениями Маурера—Картана.*

Было бы правильно назвать их уравнениями *Дарбу—Маурера—Картана.*

25. Аффинная геометрия *n* измерений. Непосредственное обобщение уравнений (26) получается в аффинной геометрии. Вводя репер, образованный точкой M и n векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, исходящими из этой точки, получим

$$d\mathbf{M}=\sum_i \omega^i \mathbf{e}_i,$$

$$d\mathbf{e}_i=\sum_h \omega_i^h \mathbf{e}_h.$$

Тот же самый процесс, который только что применялся в евклидовой геометрии, дает здесь уравнения структуры общей аффинной группы в форме:

$$\left.\begin{aligned}
d\omega^i(\delta)-\delta\omega^i(d)&=\sum_k \begin{vmatrix}\omega^k(d) & \omega_k^i(d)\\ \omega^k(\delta) & \omega_k^i(\delta)\end{vmatrix},\\
d\omega_i^j(\delta)-\delta\omega_i^j(d)&=\sum_k \begin{vmatrix}\omega_i^k(d) & \omega_k^j(d)\\ \omega_i^k(\delta) & \omega_k^j(\delta)\end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

или в еще более сжатой форме:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^i)' &= \sum_k [\omega^k \omega_k^{\ i}],\\ (\omega_i^{\ j})' &= \sum_k [\omega_i^{\ k} \omega_k^{\ j}].\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Уравнения структуры проективной группы n измерений также имеют вид:

$$(\omega_i^{\ j})' = \sum_k [\omega_i^{\ k} \omega_k^{\ j}] \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2, \ldots, n+1), \tag{31}$$

причем компонентами бесконечно малого перемещения служат величины $\omega_i^j \ (i \neq j)$ и $\omega_i^{\ i} - \omega_{n+1}^{n+1}$; число их $n(n+2)$ равно числу параметров проективной группы.

26. Основная теорема. Прежде чем переходить к приложениям, закончим основной теоремой, которая придает уравнениям структуры всю их значимость.

Если задать произвольно r дифференциальных форм $\omega_i\ (u,\ du)$, построенных на p переменных $u_1,\ u_2, \ldots, u_p$ и их дифференциалах $du_1,\ du_2, \ldots,\ du_p$, и если эти формы удовлетворяют уравнениям структуры (23), *то каждой системе значений переменных u_i можно поставить в соответствие репер (R_u) так, что относительными компонентами бесконечно малого перемещения репера будут в точности данные формы ω_i.*

Мы не станем доказывать эту теорему, чтобы не ходить в теорию вполне интегрируемых систем уравнений в частных производных. Мы заметим только, что определение реперов (R_u) возможно бесчисленным числом способов, ибо если имеется одно решение задачи, то, подвергая все реперы (R_u) одному и тому же произвольному перемещению S_c, получим другое решение. Общее решение задачи зависит, следовательно, от r произвольных постоянных.

Эта теорема содержит как частный случай теорему Дарбу, в силу которой всегда существует для трехгранника движение с двумя параметрами, в котором компонентами бесконечно малого перемещения являются заданные величины, удовлетворяющие уравнениям (28).

В частности, видно, что уравнения Кодацци (*Codazzi*) в теории поверхностей — только частный случай уравнений структуры группы евклидовых перемещений.

Можно спросить себя, нельзя ли произвольно выбрать постоянные структуры группы c_{ijs}. Ответ отрицателен: существуют алгебраические соотношения, которым должны удовлетворять эти постоянные, чтобы можно было найти r линейно независимых форм ω_i, удовлетворяющих уравнениям структуры. Мы не будем входить в исследование этого вопроса, который составляет содержание третьей основной теоремы теории групп Ли.

VII. МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА В ЕГО ПОЛНОЙ ОБЩНОСТИ

27. Реперы нулевого порядка данного многообразия. Мы в состоянии теперь изложить метод подвижного репера во всей его общности. Будем рассматривать в пространстве n измерений с основной группой G многообразие V p измерений, в каждой точке которого мы попытаемся построить определяемый внутренним образом репер. Допустим для простоты, что $p=3$.

Заметим прежде всего, что мы можем присоединить по определенному закону к каждому реперу (R_a) точку, которую мы будем называть началом репера; если репер образован, как в п. 18, конечным числом точек $A, B, C, \ldots$, мы можем, например, поставить ему в соответствие точку A. Если мы теперь будем рассматривать семейство реперов с общим началом A, то его можно в известном смысле отождествить с точкой, и наоборот. Реперы этого семейства зависят, очевидно, от $r-n$ параметров, и относительные компоненты ω_i бесконечно малого перемещения при переходе от одного из этих реперов к бесконечно близкому связаны n линейными соотношениями, так как ω_i зависят только от $r-n$ дифференциалов.

Это — соотношения с постоянными коэффициентами. Допустим, действительно, что, решенные относительно n компонент ω_i, они имеют вид:

$$\omega_1 = \lambda_{11}\omega_{n+1} + \ldots + \lambda_{1,r-n}\omega_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega_n = \lambda_{n1}\omega_{n+1} + \ldots + \lambda_{n,r-n}\omega_r.$$

Если два рассматриваемых бесконечно близких репера подвергнуть какому-нибудь перемещению, то величины ω_i не изменятся, коэффициенты λ_{ij} не зависят, следовательно, ни от точки A, ни от рассматриваемых двух реперов: это — аб-

солютные постоянные. Так как ω_i определены только вплоть до линейной с постоянными коэффициентами подстановки, то *можно предположить, что для всех бесконечно малых перемещений репера, оставляющих неподвижным его начало, имеем*

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0. \tag{32}$$

Уравнения (32) можно рассматривать как *дифференциальные уравнения точек* пространства; они вполне интегрируемы, так как их общее решение зависит от n произвольных постоянных. Можно заметить, что равны нулю все постоянные $c_{\alpha\beta i}$, где латинскими буквами обозначены указатели $1, 2, \ldots, n$ и греческими указатели $n+1, \ldots, r$. Действительно, семейство реперов с данным началом удовлетворяет, как и всякое другое, уравнениям структуры (23). Следовательно, если через d и δ обозначить два элементарных изменения внутри семейства, все $\omega_i(d)$ и $\omega_i(\delta)$ равны нулю, а следовательно, и $d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d)$ тоже равны нулю. Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha<\beta} c_{\alpha\beta i}\omega_\alpha(d)\,\omega_\beta(\delta) = 0,$$

и это — каковы бы ни были $\omega_\alpha(d)$ и $\omega_\beta(\delta)$, что и требовалось доказать.

Бесконечно малые преобразования с n первыми параметрами, равными нулю, совпадают с преобразованиями, оставляющими неподвижной начальную точку репера (R_0). Если изменить закон, по которому присоединяется точка к каждому реперу, то подгруппа, образованная $r-n$ последними бесконечно малыми преобразованиями группы, изменится и перейдет в подгруппу, оставляющую неподвижной вновь присоединенную к (R_0) точку; эти две подгруппы *гомологичны* в группе G.

28. Выбор подвижного репера, присоединенного к данному многообразию. Дифференциальные инварианты и реперы первого порядка. Переходим теперь к методу подвижного репера. Присоединим к каждой точке M данного многообразия V, которое мы будем предполагать трёхмерным, семейство реперов с началом M. Эти реперы, которые мы будем называть *реперами нулевого порядка,* зависят от $r-n$ вторичных параметров. Так как $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ обращаются в нуль, если точка M остается неподвижной при перемещениях точки M по V, то они представляют собой линейные комбинации диф-

ференциалов трех *главных* параметров t_1, t_2, t_3, определяющих положение точки на многообразии V. Мы имеем, следовательно, n—3 линейных соотношений между ω_i, которые можно записать в виде

$$\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \qquad (i = 4, \ldots, n). \tag{33}$$

Коэффициенты a_{ij} могут зависеть одновременно от t_1, t_2, t_3 и от вторичных параметров. Распорядимся этими последними так, чтобы дать определенные числовые значения наибольшему возможному числу коэффициентов. Остальные коэффициенты примут тогда значения, которые будут определенными функциями от t_1, t_2, t_3, и образуют для данного многообразия *дифференциальные инварианты первого порядка*. Полученные реперы образуют *семейство реперов первого порядка.*

Пусть $\rho_1 \leqslant r-n$ — число параметров, от которых зависят реперы первого порядка. Если ρ_1 действительно меньше, чем $r-n$, относительные компоненты бесконечно малого перемещения репера первого порядка ω_{n+1} , . . . , ω_r уже более не будут линейно независимыми при закрепленной точке M, а будут связаны $r-n-\rho_1$ линейно независимыми соотношениями. *Коэффициенты этих соотношений — вполне определенные функции дифференциальных инвариантов первого порядка.*

Действительно, если пользоваться только реперами первого порядка, то все коэффициенты форм (33) — или постоянные, или функции дифференциальных инвариантов первого порядка; значит, они не зависят от вторичных параметров первого порядка. Воспользуемся теперь уравнениями структуры (23), относя символ δ к элементарному изменению репера первого порядка, оставляющему неподвижной точку M, и символ d — к любому изменению его. Будем писать для краткости e_i вместо $\omega_i(\delta)$ и ω_i вместо $\omega_i(d)$.

Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — все нули, то

$$\delta\omega_i = \sum_{\alpha > n}^{k \leqslant n} c_{\alpha k i} e_\alpha \omega_k.$$

Следовательно, заметив, что $\delta a_{ij} = 0$, получим

$$\sum_{\alpha > n}^{k \leqslant n} (c_{\alpha k i} - a_{i1}c_{\alpha k 1} - a_{i2}c_{\alpha k 2} - a_{i3}c_{\alpha k 3})\, e_\alpha \omega_k = 0,$$

или, заменяя ω_k их значениями, будем иметь

$$\sum_{\alpha,k}(c_{\alpha ki}-a_{i1}c_{\alpha k1}-a_{i2}c_{\alpha k2}-a_{i3}c_{\alpha k3})\,a_{k1}e_\alpha=0,$$

$$\sum_{\alpha,k}(c_{\alpha ki}-a_{i1}c_{\alpha k1}-a_{i2}c_{\alpha k2}-a_{i3}c_{\alpha k3})\,a_{k2}e_\alpha=0,$$

$$\sum_{\alpha,k}(c_{\alpha ki}-a_{i1}c_{\alpha k1}-a_{i2}c_{\alpha k2}-a_{i3}c_{\alpha k3})\,a_{k3}e_\alpha=0.$$

Эти уравнения, если последовательно полагать $i=4, 5,\ldots, n$, дадут соотношения между e_α, т. е. соотношения между ω_α при неподвижной точке M. Мы видим, что коэффициенты зависят только от a_{ij}, т. е. от дифференциальных инвариантов первого порядка многообразия V.

29. Реперы второго порядка. Предположим, что, выполнив в случае необходимости линейную подстановку, коэффициенты которой являются функциями от дифференциальных инвариантов первого порядка, мы привели соотношения, существующие между $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ при неподвижной точке M, к виду

$$\omega_{n+1}=\ldots=\omega_{n_1}=0 \qquad (n_1-n=r-n-\rho_1).$$

Мы будем иметь тогда, двигая точку M по многообразию V:

$$\omega_{n+i}=a_{n+i,1}\omega_1+a_{n+i,2}\omega_2+a_{n+i,3}\omega_3 \tag{34}$$

$$(i=1, 2,\ldots, n_1-n),$$

причем коэффициенты в правых частях зависят от главных параметров и от вторичных параметров первого порядка.

Существуют два способа, чтобы отличить одни реперы первого порядка от других и прийти к семейству реперов второго порядка:

1° Постараться свести к определенным числовым значениям возможно большее число коэффициентов.

2° Если есть дифференциальные инварианты первого порядка, например два не зависящих один от другого I и J, то составить дифференциалы dI и dJ, которые выражаются линейно через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\left.\begin{aligned} dI&=I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3,\\ dJ&=J_1\omega_1+J_2\omega_2+J_3\omega_3,\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

и снова устанавливать между вторичными параметрами первого порядка и главными параметрами соотношения, позволяющие свести к определенным числовым значениям наибольшее возможное число коэффициентов, входящих в формулы (35). Реперы первого порядка с параметрами, удовлетворяющими этим соотношениям, составляют *семейство реперов второго порядка.* Что касается коэффициентов в уравнениях (34) и (35), которые не приведены к определенным числовым значениям, то они принимают постоянные значения или являются функциями только основных переменных t_1, t_2, t_3; это *дифференциальные инварианты второго порядка.*

Компоненты $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_r$ бесконечно малого перемещения репера второго порядка связаны теперь, при неподвижной точке M, $r—n—\rho_2$ соотношениями, где ρ_2 — число вторичных параметров второго порядка. Можно доказать так же, как мы только что делали, что коэффициенты этих соотношений— функции дифференциальных инвариантов двух первых порядков. Мы переходим от реперов второго порядка к реперам третьего так же, как мы перешли от реперов первого порядка к реперам второго. Но соотношения вроде (35) используются только при существовании дифференциального инварианта второго порядка, не являющегося функцией двух первых уже использованных инвариантов I и J. Также будем продолжать и далее.

30. Случай невозможности построения репера. Допустим, что после того, как получены реперы порядка p:

1° реперы порядка $p+1$ будут совпадать с реперами порядка p;

2° дифференциальные инварианты порядка $p+1$ будут функциями дифференциальных инвариантов порядка, равного или меньшего, чем p.

Тогда можно доказать, что если M и M' — две точки многообразия, для которых все дифференциальные инварианты порядка, равного или меньшего, чем p, имеют одни и те же числовые значения, и если, с другой стороны, (R) и (R') — два репера порядка p с началом соответственно в точках M и M', то перемещение, переводящее (R) в (R'), оставляет многообразие V инвариантным.

Очевидно, что в этом случае невозможно отличить один от другого реперы порядка p. Многообразие допускает группу перемещений g, порядок которой равен числу вторичных параметров порядка p, увеличенному на разность между 3 и числом независимых дифференциальных инвариантов. Если, в частности, существуют три независимых дифференциаль-

ных инварианта порядка, равного или меньшего, чем p, то всякое перемещение группы g оставляет неподвижными все точки многообразия *.

Если обстоятельство, которое только что отмечено, никогда не представится, то мы придем к полному определению репера, присоединенного к любой точке многообразия. Действительно, мы остановимся в последовательных определениях реперов только в том случае, если в какой-нибудь момент реперы порядка $p+1$ окажутся совпадающими с реперами порядка p, а, по крайней мере, один дифференциальный инвариант порядка $p+1$ будет независим от полученных ранее.

Но так как здесь не может быть более трех независимых дифференциальных инвариантов, то это обстоятельство может представиться только конечное число раз; следовательно, число вторичных параметров, определяющих реперы возрастающих порядков, будет убывать, пока не обратится в нуль.

31. Основные инварианты многообразия. Пусть мы имеем дело с общим случаем и пришли к определенному в каждой точке реперу, предположим, порядка q. Дифференциальные инварианты порядка, равного или меньшего, чем q, — *основные инварианты.*

Чтобы определить, равны ли два многообразия V и V', составляем дифференциальные инварианты порядка $q+1$. Если для многообразия V они — функции основных дифференциальных инвариантов, то будет необходимо и достаточно, чтобы это же имело место и для V' и чтобы соотношения, существующие между дифференциальными инвариантами порядка $\leqslant q+1$, были одними и теми же для обоих многообразий.

Если хотя бы один из дифференциальных инвариантов порядка $q+1$ не зависит от инвариантов низших порядков, то составим дифференциальные инварианты порядка $q+2$. Если они не дадут инвариантов, не зависящих от предыдущих, то будет необходимо и достаточно, чтобы существующие между дифференциальными инвариантами порядка

* Достаточно общий пример многообразий, где невозможно определить репер внутренним образом, представляют в проективной геометрии линейчатые поверхности с двумя прямолинейными направляющими. Если рассматривать эти поверхности как геометрическое место прямых, то, очевидно, существует группа ∞^1 гомографических преобразований, которые оставляют неподвижными обе директрисы, *так же как и всякую прямую, которая их пересекает.*

$\leqslant q+2$ соотношения были одними и теми же для обоих многообразий.

Так продолжаем до тех пор, пока дифференциальные инварианты некоторого порядка $q+h$ все будут функциями инвариантов низших порядков, что несомненно произойдет после конечного числа операций.

Заметим, что в рассмотренных ранее примерах дифференциальные инварианты никогда более не появлялись, как только репер был вполне определен.

32. Роль инвариантов в построении репера. Группа переносов и подобий на плоскости. Приведем теперь один пример, чтобы показать ту роль, которую играют дифференциальные инварианты до окончательного определения репера.

Возьмем в качестве группы G группу параллельных переносов и подобий на плоскости, зависящую от трех параметров.

Возьмем в качестве репера фигуру, образованную точкой M и двумя перпендикулярными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ одной и той же длины и строго определенных направлений. Для бесконечно малого перемещения репера имеем

$$d\mathbf{M} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2,$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega\mathbf{e}_1,$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega\mathbf{e}_2.$$

Пусть кривая задана уравнением

$$y = f(x)$$

и λ, 0; 0, λ — проекции векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на неподвижные оси. Реперы нулевого порядка имеют началом точку $M(x, y)$; они зависят от одного вторичного параметра λ. Впрочем, имеем:

$$\omega_1 = \frac{dx}{\lambda}, \quad \omega_2 = \frac{y'\,dx}{\lambda}, \quad \omega = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Отношение $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = y'$ не зависит от λ, и реперы первого порядка те же самые, что и нулевого порядка; имеется один дифференциальный инвариант первого порядка y'.

Чтобы получить реперы второго порядка, составляем дифференциал

$$dy' = \lambda y''\frac{dx}{\lambda} = \lambda y''\omega_1.$$

Так как коэффициент $\lambda y''$ зависит от λ, то можно, располагая λ, сделать его равным единице. Таким образом, имеем определенный репер второго порядка.

Выражение $\omega = \frac{d\lambda}{\lambda}$ даст тогда

$$\omega = -\frac{y'''}{y''}dx = -\frac{y'''}{(y'')^2}\omega_1.$$

Следовательно, кривая определена вплоть до преобразований группы G соотношением, которое существует между дифференциальным инвариантом третьего порядка $\frac{y'''}{(y'')^2}$ и дифференциальным инвариантом y'.

Мы предположили попутно $y'' \neq 0$. Если бы имело место $y''=0$, то нельзя было бы отличить один от другого реперы первого порядка; линия была бы прямой и допускала бы двупараметрическую подгруппу группы G.

VIII. МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА, ОСНОВАННЫЙ НА УРАВНЕНИЯХ СТРУКТУРЫ

33. Исследование многообразия по уравнениям структуры. Общий метод подвижного репера, как он изложен в предыдущих параграфах, предполагает, что многообразие V действительно дано и последовательные выкладки выполняются. Но, как мы уже заметили, это не имеет значения в теоретических исследованиях, где дело идет об определении только вида формул Френе и о выделении различных частных случаев, которые могут представиться. С этой точки зрения уравнения структуры играют основную роль *даже в теории кривых.*

Вернемся к задаче, рассмотренной в п. **26** и следующих.

Ко всякой точке M многообразия V трех измерений было присоединено семейство реперов с началом в M. Для всякого бесконечно малого перемещения такого репера справедливо соотношение

$$\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \qquad (i = 4, \ldots, n). \tag{36}$$

Можно ли предсказать, как коэффициенты a_{ij} зависят от вторичных параметров и к каким числовым значениям их можно привести? Представим себе для этого элементарное изменение репера нулевого порядка *при неподвижной точке* M; присвоим ему символ дифференцирования δ.

Обозначив через δa_{ij} элементарное изменение коэффициентов a_{ij}, мы получим из уравнений структуры:

$$\delta a_{i1}\omega_1 + \delta a_{i2}\omega_2 + \delta a_{i3}\omega_3 = \delta\omega_i - a_{i1}\delta\omega_1 - a_{i2}\delta\omega_2 - a_{i3}\delta\omega_3,$$

откуда

$$\delta a_{i1} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i1}c_{\alpha k1} - a_{i2}c_{\alpha k2} - a_{i3}c_{\alpha k3})\, a_{k1},$$

$$\delta a_{i2} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i1}c_{\alpha k1} - a_{i2}c_{\alpha k2} - a_{i3}c_{\alpha k3})\, a_{k2},$$

$$\delta a_{i3} = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} e_\alpha \sum_{k=4}^{k=n} (c_{\alpha ki} - a_{i1}c_{\alpha k1} - a_{i2}c_{\alpha k2} - a_{i3}c_{\alpha k3})\, a_{k3}.$$

Правые части являются, следовательно, элементарными изменениями коэффициентов a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} под действием группы, бесконечно малые преобразования которой, таким образом, известны; эта группа, впрочем, — гомографическая группа.

Если бы мы могли перейти от бесконечно малых преобразований к конечным преобразованиям, что в обычных приложениях легко сделать, то мы снова пришли бы к отысканию тех числовых значений, к которым можно свести a_{ij} преобразованием группы *. Известно, например, что при помощи ортогональной группы с тремя переменными можно свести два из коэффициентов a_{ij} к нулю, причем третий примет определенное значение, если только мы не находимся в комплексной области, когда может случиться, что можно свести три переменных к значениям 1, i, 0, если опять три переменных не равны нулю все три одновременно.

Следовательно, теоретически говоря, уравнения структуры позволяют предвидеть различные неприводимые между собой случаи, которые могут представиться, и позволяют таким образом в каждом случае сделать заключение о природе реперов первого порядка. Тот же метод может служить для перехода от реперов одного какого-либо порядка к реперам порядка непосредственно высшего.

* Впрочем, с точки зрения теоретической, бесполезно возвращаться к конечным преобразованиям группы. Мы обязаны С. Ли методом, позволяющим по одному заданию бесконечно малых преобразований найти точку, представительницу семейства точек, гомологичных в силу рассматриваемой группы.

34. Пример. Плоские кривые в аффинной геометрии. Приложим сказанное к теории плоских кривых в аффинной унимодулярной геометрии. В обозначениях п. **12**, если ω^1, ω^2, $\omega_1{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^1$ — компоненты бесконечно малого перемещения репера, имеем уравнения структуры:

$$\left.\begin{aligned}
d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) &= \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_2{}^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_2{}^1(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d) &= \begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega_1{}^2(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega_1{}^2(\delta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_1{}^1(\delta) - \delta\omega_1{}^1(d) &= \begin{vmatrix} \omega_1{}^2(d) & \omega_2{}^1(d) \\ \omega_1{}^2(\delta) & \omega_2{}^1(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_1{}^2(\delta) - \delta\omega_1{}^2(d) &= 2\begin{vmatrix} \omega_1{}^1(d) & \omega_1{}^2(d) \\ \omega_1{}^1(\delta) & \omega_1{}^2(\delta) \end{vmatrix}, \\
d\omega_2{}^1(\delta) - \delta\omega_2{}^1(d) &= 2\begin{vmatrix} \omega_2{}^1(d) & \omega_1{}^1(d) \\ \omega_2{}^1(\delta) & \omega_1{}^1(\delta) \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\}$$

Можно сразу начать с реперов первого порядка, удовлетворяющих условию

$$\omega^2 = 0.$$

Замечая, что $\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0$, мы имеем тогда

$$\delta\omega^2 = -e_1{}^2\omega^1,$$

откуда

$$e_1{}^2 = 0;$$

следовательно, заставляя точку двигаться по кривой, имеем соотношения вида:

$$\omega_1{}^2 = \alpha\omega^1.$$

С другой стороны, варьируя реперы первого порядка при неподвижной точке M $(e^1 = e^2 = e_1{}^2 = 0)$, имеем

$$\delta\omega_1{}^2 = 2e_1{}^1\omega_1{}^2, \ \delta\omega^1 = -e_1{}^1\omega^1,$$

откуда

$$\delta\alpha = 3e_1{}^1\alpha.$$

Это соотношение показывает, что при бесконечно малой вариации репера первого порядка коэффициент δ умножается на постоянную $1+3e_1{}^1$, бесконечно близкую к единице; следовательно, при конечном изменении он умножается на произвольную постоянную.

Теперь возможны два случая:

1°. Или $\alpha=0$ (случай прямой), и тогда нельзя более отличить один от другого реперы первого порядка.

2°. Или же $\alpha\neq 0$, и тогда можно выбрать среди реперов первого порядка некоторое семейство так, чтобы α стало равно единице; это будут реперы второго порядка.

Если коэффициент α приведен к единице и, следовательно, $\delta\alpha$ равно нулю для вариации репера второго порядка, то $e_1{}^1=0$, откуда

$$\omega_1{}^1 = \beta\omega^1.$$

Будем менять репер второго порядка, оставляя неподвижной точку M (тогда $e^1=e^2=e_1{}^2=e_1{}^1=0$). Имеем:

$$\delta\omega_1{}^1 = -e_2{}^1\omega_1{}^2 = -e_2{}^1\omega^1, \quad \delta\omega^1 = 0,$$

откуда

$$\delta\beta = -e_2{}^1.$$

Коэффициент β увеличивается на бесконечно малую величину $-e_2{}^1$; значит, при конечном изменении репера он увеличится на произвольную конечную величину. Следовательно, можно сделать так, чтобы он обратился в нуль. Репер тогда будет вполне определен (репер третьего порядка), и мы получим

$$\omega_2{}^1 = k\omega^1,$$

где k — первый дифференциальный инвариант (аффинная кривизна); он — четвертого порядка.

Мы вновь находим результаты, уже полученные двумя другими способами (пп. **12** и **13**).

35. Геометрия с другим образующим элементом. Пространство прямых. Предыдущие рассуждения, подкрепленные несколькими примерами, которые их иллюстрируют, показывают, что *уравнения структуры группы G содержат в себе всю дифференциальную геометрию пространства, обладающего основной группой G*, с единственным условием знания линейных соотношений с постоянными коэффициентами между формами ω_i, которые определяют точки пространства; классификацию кривых, поверхностей и всякого рода точечных многообразий можно произвести, исходя из уравнений

структуры, без логической необходимости какой-либо геометрической интуиции.

Известно, что в проективной геометрии теория линейчатого пространства, т. е. пространства, в котором за образующий элемент взята прямая линия, развертывается аналогично теории точечного пространства. Во всякой геометрии в духе Клейна естественно можно взять за элемент, образующий пространство, всякую совокупность фигур, обладающую следующими двумя характерными свойствами:

1°. Рассматриваемые фигуры транзитивно преобразуются между собой преобразованиями фундаментальной группы G.

2°. Не существует никакого преобразования группы G, оставляющего неподвижными все фигуры совокупности.

Метод подвижного репера прилагается без изменений, когда точки заменим другим образующим элементом. Возьмем, например, евклидову геометрию трех измерений.

Если мы примем прямую за образующий элемент, то достаточно присоединить к каждому реперу определенную прямую, которая будет играть роль прямой-начала этого репера. Это будет, например, ось z подвижного прямоугольного трехгранника. Если репер меняется так, что его прямая-начало, остается неподвижной, то существует, как известно, четыре линейных с постоянными коэффициентами соотношения между компонентами ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} бесконечно малого перемещения репера.

Действительно, замечая, что точка M перемещается тогда по оси z, и эта ось z остается неподвижной, мы находим:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{23} = \omega_{31} = 0.$$

Это четыре дифференциальных уравнения прямых в пространстве, или, точнее, уравнения, определяющие семейство реперов с одной и той же начальной прямой. Компоненты ω_1, ω_2, ω_{23}, ω_{31} играют в приложении метода подвижного репера ту же роль, которую играли в изложении § VII n компонент $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Вообще всякому выбору образующего элемента соответствует *вполне интегрируемая* система уравнений в полных дифференциалах, устанавливающая линейные с постоянными коэффициентами соотношения между $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Обратное предложение легко доказать*.

* С другой точки зрения, всякому выбору образующего элемента соответствует выбор определенной подгруппы из группы G, которая оставляет инвариантным исходный образующий элемент. Обратно, всякой подгруппе соответствует семейство образующих элементов.

Все предшествующее показывает еще лучше, чем раньше, ту роль, которую играют уравнения структуры группы G.

IX. РАССМОТРЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТРУКТУРЫ КАК УРАВНЕНИЙ, ПОЗВОЛЯЮЩИХ ПОСТРОИТЬ ПРОСТРАНСТВО

36. Шесть дифференциальных форм ω, удовлетворяющих уравнениям структуры евклидовой группы, позволяют организовать трехмерный континуум в евклидово пространство. Можно посмотреть на уравнения структуры группы еще с другой точки зрения. Представим себе в обыкновенном пространстве какую-нибудь систему криволинейных координат u_1, u_2, u_3. Пусть ко всякой точке пространства присоединен определенный прямоугольный трехгранник. Если мы знаем в функциях, линейных относительно du_1, du_2, du_3, шесть относительных компонент бесконечно малого перемещения этого трехгранника ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, мы можем восстановить дифференциальным путем все евклидово пространство при том необходимом и достаточном условии, чтобы шесть данных форм удовлетворяли уравнениям структуры Дарбу и чтобы три формы ω_1, ω_2, ω_3 были линейно независимы. Если мы зададимся точкой евклидова пространства, которая соответствует координатам (u_1^0, u_2^0, u_3^0), и в этой точке прямым трехгранником, мы сможем определить, какая точка пространства соответствует произвольным координатам и какой прямой трехгранник следует к ней присоединить. Можно, следовательно, сказать, что *задание в трехмерном континууме шести дифференциальных форм* ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, *удовлетворяющих уравнениям структуры евклидовой группы, позволяет организовать этот континуум подобно евклидову пространству* (и притом бесчисленным числом способов) и сделать из него что-то вроде евклидова пространства, к каждой точке которого присоединен определенный прямоугольный трехгранник.

Задаться шестью рассматриваемыми формами — это, если угодно, все равно, что присоединить к каждой паре бесконечно близких точек континуума евклидово бесконечно малое перемещение, параметры которого будут в точности равны ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}. В этом смысле *континуум, организованный подобно евклидову пространству, является носителем бесконечно малых евклидовых перемещений.* Но надо заметить, что эти перемещения, присоединенные к различным парам бесконечно близких точек, не произвольны, так как их компоненты должны удовлетворять уравнениям структуры.

Задание шести компонент ω_i, ω_{ij} соответствует выбору трехгранников, присоединенных к различным точкам пространства; оно произвольно до известной степени. Так как бесконечно малое перемещение, присоединенное к двум бесконечно близким точкам, имеет вид $S_a^{-1}\ S_{a+da}$, где S_a и S_{a+da} означают перемещения, приводящие начальный репер в совпадение с реперами, присоединенными к этим двум точкам, то можно заменить S_a любым другим перемещением, приводящим начало в рассматриваемую точку, но эти перемещения будут вида S_aR, где R означает произвольное вращение около начала. Отсюда следует, что, присоединяя по произвольному закону ко всякой точке (u_1, u_2, u_3) континуума евклидово вращение R_u вокруг начала, мы заменим бесконечно малое перемещение $S_u^{-1}\ S_{u+du}$ бесконечно малым перемещением $R_u^{-1}\ (S_u^{-1}\ S_{u+du})\ R_{u+du}$.

Этот результат можно высказать следующим образом. *Если бесконечно малое перемещение $T_{u;\,du}$, присоединенное к двум бесконечно близким точкам, заменить перемещением*

$$T'_{u;du} = R_u^{-1} T_{u;du} R_{u+du},$$

то получим ту же самую евклидову организацию континуума. Замена данных перемещений соответствует простому изменению трехгранников, присоединенных к различным точкам пространства.

Вообще можно было бы вместо R_u взять *произвольное* вращение, зависящее от трех параметров v_1, v_2, v_3; мы получили бы таким образом континуум, снабженный полной системой реперов, зависящих от шести параметров; мы бы знали линейно независимые компоненты ω_i, ω_{ij} бесконечно малого перемещения этого репера, и можно было бы, следовательно, прилагать метод подвижного репера к данным криволинейным координатам.

37. Пример: плоскость. Разъясним все предыдущее, разобрав подробно, как обстоит дело на плоскости.

Мы имеем континуум двух измерений, определенный посредством двух координат u и v, и задаемся системой трех форм:

$$\omega_1 = \xi\, du + \xi_1\, dv,\ \omega_2 = \eta\, du + \eta_1\, dv,\ \omega_{12} = r\, du + r_1\, dv,$$

удовлетворяющих уравнениям структуры:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{\partial v}-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\eta r_1-r\eta_1,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial v}-\frac{\partial\eta_1}{\partial u}=-\xi r_1+r\xi_1,\\
&\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(37)$$

Величины ω_1, ω_2, ω_{12} служат: две первые — компонентами параллельного переноса осей (подвижных) и последняя — компонентой вращения около начала (подвижного).

Если мы изменим расположение осей, например если мы их повернем на угол θ, мы получим более общие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\\
&\widetilde{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta,\\
&\widetilde{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta,
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

которые позволят применить метод подвижного репера. Например, прямые будут характеризоваться тем свойством, что к ним можно присоединить репер с неподвижной первой осью, что даст

$$\widetilde{\omega}_2=0,\quad \widetilde{\omega}_{12}=0,$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \omega_{12}+\frac{\omega_1\,d\omega_2-\omega_2\,d\omega_1}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}=0.$$

Таким образом, получается дифференциальное уравнение прямых, если ω_1, ω_2, ω_{12} заменить данными выражениями их.

Окружность радиуса a точно так же характеризуется уравнениями

$$\widetilde{\omega}_2=0,\quad \widetilde{\omega}_{12}=\frac{1}{a}\,\widetilde{\omega}_1$$

и т. д.

Все это естественно прилагается к какому угодно пространству Клейна, определенному в любых криволинейных координатах.

38. Внутренняя геометрическая сущность уравнений структуры. Чтобы подготовить введение обобщенных пространств, нам остается показать, в чем состоит внутреннее геометрическое значение уравнений структуры.

Возьмем пространство Клейна и присоединим к каждой паре бесконечно близких точек (u_i) и (u_i+du_i) бесконечно малое перемещение $T_{u;\,du}$, удовлетворяющее условиям структуры. Это сводится к присоединению ко всякой точке пространства репера (R_u); если этот репер получается из начального репера перемещением S_u, то

$$T_{u;du} = S_u^{-1} S_{u+du}.$$

Представим себе в пространстве замкнутый обход, или цикл, который мы разделим точками деления $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ на большое число очень малых дуг. Обозначим через (R_i) репер, присоединенный к точке M_i, и через S_i перемещение, которое переводит начальный репер (R_0) в (R_i).

Перемещением, переводящим (R_0) в (R_1), служит перемещение $S_0^{-1} S_1$; перемещением, переводящим (R_0) в (R_2),— перемещение

$$S_0^{-1} S_2 = (S_0^{-1} S_1)(S_1^{-1} S_2)$$

и т. д.

Перемещение, переводящее (R_0) в (R_p), имеет вид:

$$S_0^{-1} S_p = (S_0^{-1} S_1)(S_1^{-1} S_2) \ldots (S_p^{-1} S_p);$$

все эти перемещения отнесены к реперу (R_0). Наконец, когда цикл будет описан, мы вернемся к реперу (R_0) перемещением, которое необходимо равно нулю; оно явится произведением бесконечно малых перемещений, присоединенных к дугам, на которые цикл был разложен.

Следовательно, если обозначить через $T_{i,i+1}$ *бесконечно малое перемещение, отнесенное к реперу* (R_i), *которое переводит* (R_i) *в* (R_{i+1}), *то имеем*

$$T_{0,1} T_{1,2} \ldots T_{n-2,\,n-1} T_{n-1,0} = I. \tag{39}$$

39. Бесконечно малое перемещение репера в точках одного цикла. *Предыдущее соотношение, по условию верное для всех циклов n-мерного континуума, достаточно для того, чтобы компоненты бесконечно малого перемещения* $T_{u;\,du}$, *присоединенного к паре бесконечно близких точек этого континуума, удовлетворяли уравнениям структуры.* Действительно, поставим в соответствие какой-либо точке (u_i^0) континуума определенную точку A_0 в пространстве Клейна и определенный репер (R_0) с началом A_0. Пусть теперь (u_i) — какая-то точка континуума; соединим непрерывной кривой (u_i^0) и

(u_i) и разделим этот путь на большое число малых дуг. К каждой из этих дуг присоединим бесконечно малое перемещение $T_{u;\ du}$; построим теперь, начиная с (R_0), последовательно реперы, получающиеся один из другого соответствующими бесконечно малыми перемещениями; эти перемещения, по предположению, аналитически определены по отношению к реперу, который переносится. Мы придем таким образом к конечному реперу (R_u), который будет вполне определен, когда в пределе число малых дуг будет увеличиваться до бесконечности, а каждая дуга будет стремиться к нулю. Репер (R_u), присоединенный таким образом к точке (u_i) континуума, не зависит от пути, которым следовали в континууме, чтобы прийти из точки (u_i^0) в точку (u_i); это в точности следует из гипотезы относительно циклов континуума, выраженной соотношением (39). Легко затем показать, что перемещение, переводящее (R_u) в (R_{u+du}), совпадает, если его отнести к (R_u), с данным перемещением $T_{u;\ du}$. Этого, очевидно, достаточно, чтобы компоненты $T_{u;\ du}$ удовлетворяли уравнениям структуры.

40. Циклы, не стягивающиеся в точку. Казалось бы, после всего предшествующего, что уравнения структуры абсолютно эквивалентны соотношениям (39).

В действительности уравнения структуры являются не чем иным, как соотношениями (39), *приложенными к бесконечно малым циклам.* Более глубокое исследование показывает, что если задаться произвольно перемещением $T_{u;\ du}$ с компонентами ω_i и рассмотреть элементарный параллелограмм с вершинами

$$(u_i^0) = (u_i),\ (u_i^1) = (u_i + du_i),$$

$$(u_i^2) = (u_i + du_i + \delta u_i + d\delta u_i),\ (u_i^3) = (u_i + \delta u_i),$$

где d и δ — два символа дифференцирования, перестановочные между собой, то компонентами перемещения

$$T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3}T_{3,0}$$

являются в точности величины

$$\Omega_i = d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d) - \sum_{j,h} c_{jhi}\omega_j(d)\,\omega_h(\delta).$$

Почти очевидно, что соотношения (39), по предположению верные для бесконечно малых циклов, будут еще верны для конечных циклов при условии, что эти циклы могут быть

сведены непрерывным изменением к точке. Следовательно, *из уравнений структуры не вытекают обязательно соотношения* (39) *для циклов, не удовлетворяющих этому условию.*

X. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

41. Обобщение пространства Клейна. Пространства с кривизной и кручением. Мы в состоянии теперь понять, как можно обобщить понятие пространства Клейна.

Первое обобщение этого рода восходит к Гауссу, который, конечно, не мог стоять на нашей точке зрения. Вернемся к уравнениям Дарбу (37) в геометрии на плоскости. Знания компонент перемещения на плоскости ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 в функциях двух параметров u и v достаточно, чтобы восстановить евклидову организацию плоскости. Но мы можем заметить, что уже знания ξ, ξ_1, η, η_1 достаточно, ибо два первые уравнения (37) позволяют получить значения r и r_1. С другой стороны, вместо того чтобы задаваться двумя формами ω_1 и ω_2, которые определяют ξ, ξ_1, η, η_1, можно совершенно так же задаться, как мы это видели в п. **37**, двумя формами:

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, \quad \tilde{\omega}_2 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta.$$

Это означает, что одного только знания квадратичной формы $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ достаточно, чтобы восстановить евклидову организацию плоскости. Эта квадратичная форма — не что иное, как ds^2 плоскости, квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками.

Это — хорошо известный результат, внутреннее основание которого заключается в том, что евклидову геометрию можно построить на одном понятии расстояния.

Линейный элемент ds^2 нельзя задать произвольно, если хотеть, чтобы уравнения структуры были удовлетворены. Зададим, однако, произвольное ds^2, т. е. зададимся для ξ, ξ_1, η, η_1 произвольными функциями от u и v; мы сможем еще получить r и r_1 из первых двух уравнений структуры, но третье не будет более удовлетворено. Двумерный континуум, обладающий заданным линейным элементом ds^2, можно было бы, мы знаем, уподобить поверхности, и он обладал бы всеми геометрическими свойствами поверхности, которые зависят от линейного элемента. На такой поверхности *теория кривых будет тождественно та же, что и на плоскости, и ничто не изменится в приложении метода подвижного репера.* Вводя наиболее общий репер с компонентами $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ бесконечно малого перемещения, мы будем присоединять по-

движной репер к кривой с условием $\widetilde{\omega}_2=0$, который дает нам кривизну (*геодезическая кривизна* в смысле Гаусса):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\widetilde{\omega}_{12}}{\widetilde{\omega}_1}.$$

Различие между поверхностью и плоскостью станет заметным только благодаря тому, что третье уравнение структуры (37) не будет более удовлетворено; мы будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=K(\xi\eta_1-\eta\xi_1),$$

или в наших обозначениях

$$d\omega_{12}(\delta)-\delta\omega_{12}(d)=-K\begin{vmatrix}\omega_1(d)\,\omega_2(d)\\ \omega_1(\delta)\,\omega_2(\delta)\end{vmatrix}.$$

Коэффициент K есть *полная кривизна.* Его можно истолковать, вообразив бесконечно малый цикл и репер, присоединенный к различным точкам цикла, перемещающийся шаг за шагом без вращения. После возвращения в исходную точку он примет положение, отличное от начального, получающееся из него вращением $Kd\sigma$, где $d\sigma$ означает площадь, ограниченную циклом.

Можно представить себе другие обобщения евклидовой плоскости, присоединяя к каждой паре бесконечно близких точек двумерного континуума бесконечно малое евклидово перемещение $T_{u;\,du}$, для которого первые два уравнения структуры не будут удовлетворены. Например, можно было бы задаться произвольными функциями ξ, ξ_1, η, η_1, полагая $r=r_1=0$. Евклидовы реперы, присоединенные к различным точкам континуума, будут, следовательно, получаться один из другого простым переносом; мы будем иметь *пространство евклидовой связности, обладающее абсолютным параллелизмом.* В этом пространстве теория кривых все еще та же, что на евклидовой плоскости. Вводя наиболее общие реперы, будем иметь:

$$\widetilde{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\ \widetilde{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta,\ \widetilde{\omega}_{12}=d\theta;$$

прямые будут определены уравнениями

$$\widetilde{\omega}_2=\widetilde{\omega}_{12}=0,$$

или

$$\eta+\eta_1\frac{dv}{du}=C\left(\xi+\xi_1\frac{dv}{du}\right),$$

где C — произвольное постоянное, определяющее направление прямой. На поверхности, заданной своим ds^2, можно определить *евклидову связность* с абсолютным параллелизмом, разлагая ее ds^2 на сумму двух квадратов $(\omega_1)^2+(\omega_2)^2$ и принимая $\omega_{12}=0$; например, для сферы, отнесенной к ее широте φ и долготе θ, можно было бы взять:

$$\omega_1 = d\theta, \quad \omega_2 = \sin\theta\, d\varphi, \quad \omega_{12} = 0;$$

прямыми будут локсодромии, допускающие в качестве полюсов два полюса сферы и определяемые уравнением

$$\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

В этом обобщении, отличном от гауссова, перемещение T_{01}, T_{12}, ..., присоединенное к циклу, — уже не просто вращение, а перенос с компонентами

$$\Omega_1 = d\omega_1(\delta) - \delta\omega_1(d) + \begin{vmatrix} \omega_2(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_2(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix},$$

$$\Omega_2 = d\omega_2(\delta) - \delta\omega_2(d) - \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_{12}(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_{12}(\delta) \end{vmatrix};$$

это *кручение* пространства в противоположность *кривизне* Гаусса *.

Наконец, наиболее общее двумерное пространство с евклидовой связностью получится, если принять за ξ, ξ_1, η, η_1, r, r_1 абсолютно произвольные функции от u и v; тогда будем иметь и *кривизну*, и *кручение*.

Но и тогда все еще теория кривых и приложение метода подвижного репера будут в точности теми же, что и на евклидовой плоскости.

42. Римановы пространства. Если перейти от евклидовой плоскости к евклидову пространству произвольного числа измерений, то снова найдем, как частный случай, классическую риманову геометрию. Уравнения структуры евклидова пространства можно разбить на две группы:

* В обозначениях Дарбу кручение определено аналитически двумя коэффициентами a и b в уравнениях

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\partial\xi_1}{\partial u} = a(\xi\eta_1 - \eta\xi_1),$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\eta_1}{\partial u} = b(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

1°. Уравнения, которые в сжатой форме имеют вид:

$$\omega_i' = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}]; \tag{40}$$

2°. Уравнения

$$\omega_{ij}' = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \tag{41}$$

Если задаться в n-мерном континууме n формами ω (компонентами переноса), по предположению линейно независимыми в $du_1, \ldots, du_n$, то уравнения (40) позволят вывести отсюда без труда формы ω_{ij} (компоненты вращения подвижного репера). С другой стороны, с изменением репера, присоединенного к точке, ω_i испытывают произвольную ортогональную подстановку, так что задания линейного элемента пространства

$$ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + \ldots + (\omega_n)^2$$

достаточно, чтобы его организовать по-евклидовски при само собой подразумевающемся условии, что уравнения структуры будут удовлетворены.

Если задаться произвольным ds^2, то получится риманово пространство; все еще можно устроить так, чтобы удовлетворить уравнениям структуры (40); это позволит по закону, внутренне связанному с заданным ds^2, определить бесконечно малое евклидово перемещение, приводящее в совпадение два бесконечно близких прямоугольных репера или, что то же, определить угол двух направлений, исходящих из двух бесконечно близких точек пространства. Таким образом, приходим к понятию *параллелизма* Леви-Чивита.

Уравнения структуры (41) вообще более не удовлетворены; следует добавить в правых частях дополнительные члены, которые определят *риманову кривизну* пространства.

В римановом пространстве приложение метода подвижного репера к теории кривых тождественно то же, что в евклидовом пространстве; классификация кривых, понятие кривизны и кручения те же. Иначе говоря, *все операции евклидовой дифференциальной геометрии, которые относятся к теории кривых, сохраняют свое значение в римановой геометрии.* Приложение метода подвижного репера к теории поверхностей будет происходить так же, как и в евклидовой геометрии, но результаты будут не те, а именно: в евклидовой геометрии, как и в римановой, приходится считаться со

значениями билинейных ковариантов ω_i' и ω_{ij}', а эти выражения различны в обеих геометриях, если число переменных превышает единицу. Таким образом, понятие прямой, окружности, винтовой линии и т. д. автоматически обобщается при переходе от евклидовой геометрии к римановой геометрии, но понятия *плоскости* вообще не существует в римановой геометрии, если только определять плоскость теми же *дифференциальными* свойствами, что и в евклидовой геометрии. Действительно, эти дифференциальные свойства в трехмерном пространстве записываются уравнениями

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0,$$

и эти уравнения не будут вполне интегрируемы, если уравнения структуры перестанут удовлетворяться.

Можно, естественно, рассмотреть пространства *евклидовой связности* более общие, чем римановы, когда перестанут удовлетворяться первые уравнения структуры. *Римановы пространства с абсолютным параллелизмом,* найденные Эйнштейном, — это такие пространства, для которых последние уравнения структуры (41) удовлетворены, а первые нет. Они не содержат кривизны, но имеют кручение.

43. Геометрический смысл кривизны и кручения пространства. Легко видеть теперь, как ко всякой группе G с n переменными можно присоединить бесконечное множество обобщенных пространств, допускающих G в качестве основной группы; эти пространства можно рассматривать как континуумы n измерений, в которых к каждой паре бесконечно близких точек (u_i) и $(u_i + du_i)$ присоединено определенное бесконечно малое преобразование $T_{u;\,du}$ группы G так, что уравнения структуры перестают удовлетворяться*.

В этих пространствах операции дифференциальной геометрии клейновского пространства группы G продолжают сохранять свое значение; теория кривых там та же, что и в пространстве Клейна; метод подвижного репера там прилагается тоже по-прежнему. Но классификация поверхностей так же, как и некоторые свойства их, уже не те.

Ко всякому циклу обобщенного пространства с заданной начальной точкой A_0 присоединено преобразование группы G.

---

* С более общей точки зрения можно было бы в континууме $m \neq n$ измерений, каждая точка которого определена какой-нибудь системой координат $u_1, u_2, \ldots, u_m$, присоединить к каждой паре бесконечно близких точек бесконечно малое преобразование $T_{u;\,du}$ группы G; получится пространство, которое сохранит еще некоторые понятия дифференциальной геометрии пространства Клейна с фундаментальной группой G.

Можно его себе изобразить следующим образом. Вообразим последовательность наблюдателей, расставленных вдоль цикла, представляющих, что они все находятся в пространстве Клейна, и обладающих каждый определенным репером. Наблюдатель, помещенный в A_0, мог бы попытаться изобразить в пространстве Клейна, в котором он считает себя находящимся, последовательность положений реперов своих коллег, если бы каждый из них передал ему положение по отношению к своему собственному реперу репера бесконечно близкого. Когда наблюдатель, помещенный в A_0, достигнет конца цикла, он обнаружит, что он должен придать своему собственному реперу положение, отличное от того, которое он занимает в действительности; перемещение, необходимое чтобы вернуться к этому начальному положению, есть перемещение, присоединенное к циклу с началом A_0. Очевидно, что это перемещение, рассматриваемое с точки зрения чисто геометрической наблюдателем, помещенным в A_0, не зависит от последовательности реперов, выбранных промежуточными наблюдателями, но его аналитическое выражение зависит от выбора репера в начале A_0. На рассмотрении перемещений, присоединенных к различным циклам *данного начала* A_0, можно основать очень важное понятие — понятие *группы голономии* пространства. Но мы не будем входить в рассмотрение этого вопроса.

Если циклом служит элементарный параллелограмм, то компонентами бесконечно малого перемещения, присоединенного к циклу, являются те дополнительные члены, которые надо добавить к правым частям уравнений структуры, чтобы эти уравнения стали точными. Это — билинейные выражения, альтернированные по отношению к двум сериям дифференциалов du_i и δu_i, или еще по отношению к двум сериям компонент $\omega_i(d)$ и $\omega_i(\delta)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, если допустить, что дифференциальные уравнения точек получаются приравниванием нулю n первых форм ω_i *.

Пространство — *без кручения,* если дополнительные члены первых уравнений равны нулю; это имеет место в классических римановых пространствах, так как перемещение, присоединенное к элементарному циклу с началом A_0, есть вращение вокруг своего начала репера, связанного с точкой A_0.

44. Обобщенные пространства с различными образующими элементами. Клейновская геометрия с основной группой G

* Эти билинейные выражения не произвольны; они удовлетворяют тождествам [тождествам Бианки (*Bianchi*) в римановой геометрии], которые составляют *теорему сохранения кривизны и кручения.*

может принимать много различных видов в зависимости от выбора *образующего элемента.*

В предыдущем мы предполагали, что это — точка. При другом выборе образующего элемента получатся обобщенные геометрии, *существенно отличные* от предыдущих. Если в обыкновенной геометрии рассматривать пространство как геометрическое место плоскостей, то понятие точки сохранится, если рассматривать точку как семейство плоскостей частного вида, зависящее от трех параметров; но как в римановом пространстве, являющемся *точечным* пространством с евклидовой связностью, исчезает понятие плоскости, так в *пространстве плоскостей* с евклидовой связностью исчезает понятие точки, и геометрия в таком пространстве совершенно отлична от римановой геометрии.

Интересно посмотреть, чтобы не оставаться в рамках этих общих рассуждений, как можно было бы аналитически определить линейчатое пространство с евклидовой связностью. Если в евклидовом пространстве присоединить к каждому прямоугольному трехграннику третью ось как *начальную прямую,* то компонентами бесконечно малого перемещения трехгранника, обращающимися в нуль при неподвижной начальной прямой, являются, как мы это видели (п. **35**), величины

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_{13}, \quad \omega_{23}.$$

Линейчатое пространство с евклидовой связностью определяется заданием шести дифференциальных форм от четырех переменных u_1, u_2, u_3, u_4, из которых четыре ω_1, ω_2, ω_{13}, ω_{23} линейно независимы. Можно заметить здесь, что из знания этих четырех форм в евклидовой геометрии вытекает знание двух других. В обозначениях Дарбу задаемся функциями ξ_i, η_i, p_i, q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, и уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} &= \eta_i r_j - r_i \eta_j - \zeta_i q_j + q_i \zeta_j, \\
\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} &= \zeta_i p_j - p_i \zeta_j - \xi_i r_j + r_i \xi_j, \\
\frac{\partial p_i}{\partial u_j} - \frac{\partial p_j}{\partial u_i} &= q_i r_j - r_i q_j, \\
\frac{\partial q_i}{\partial u_j} - \frac{\partial q_j}{\partial u_i} &= r_i p_j - p_i r_j
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

определяют единственным образом ξ_i и r_i.

Чтобы получить линейчатое пространство с евклидовой связностью *без кручения*, следует задаться функциями ξ_i, η_i, p_i, q_i, ζ_i, r_i, удовлетворяющими 24 предыдущим уравнениям. Но мы знаем, что эти функции можно выбирать бесконечным числом способов для одного и того же пространства в зависимости от частного выбора реперов. Что касается форм ω_1, ω_2, ω_{13}, ω_{23}, то оказывается, что с выбором репера не меняются две квадратичные формы:

$$(\omega_{13})^2 + (\omega_{23})^2 \text{ и } \omega_1\omega_{23} - \omega_2\omega_{13},$$

из которых первая представляет квадрат угла двух бесконечно близких прямых и вторая — произведение этого угла на кратчайшее расстояние между ними. Но эти две дифференциальные квадратичные формы нельзя выбирать произвольно, если желать, чтобы уравнения (42) были удовлетворены при подходящем выборе ξ_i и r_i. В частности, необходимо, чтобы первая форма $(\omega_{13})^2+(\omega_{23})^2$ могла быть выражена как дифференциальная квадратичная форма только двух переменных. Особенно просто выбрать эти две основные квадратичные формы, приняв

$$\left.\begin{aligned} (\omega_{13})^2 + (\omega_{23})^2 &= (du_1)^2 + (du_2)^2, \\ \omega_1\omega_{23} - \omega_2\omega_{13} &= du_2 du_3 - du_1 du_4. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Переменные u_1 и u_2 определяют *направление* прямой. Мы увидим, что в соответствующей линейчатой геометрии понятие точки (рассматриваемой как центр связки прямых) и понятие плоскости (рассматриваемой как плоское поле прямых) сохраняются*.

Условие того, что две прямые (u_i) и (u_i') *принадлежат одной и той же точке*, или что две прямые (u_i) и (u_i') *принадлежат одной и той же плоскости*, одно и то же, а именно:

$$(u_2' - u_2)(u_3' - u_3) - (u_1' - u_1)(u_4' - u_4) = 0.$$

45. Обобщенное проективное пространство и геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений второго порядка. Ясно, что большое число обобщенных геометрий — до сих пор только геометрические достопримечательности. Они имеют, однако, двойное преимущество бросать свет на самые основы дифференциальной геометрии и образовывать резервуар геометрических схем, из которого могут черпать

* Если пространство без кручения, то понятие плоскости необходимо сохраняется, но вообще этого не будет с понятием точки.

математика и математическая физика. Таким образом, например, риманова геометрия с абсолютным параллелизмом, которая лежит в основе новейших изысканий Эйнштейна, входит в общую схему, которую мы изложили. Совершенно так же пространства Вейля (*Weyl*) являются пространствами без кручения, допускающими в качестве основной группы группу подобия; теория кривых в этих пространствах дана формулами Френе (8). До сих пор кроме римановых пространств и пространств Вейля изучались пространства аффинной связности, проективной связности и конформной связности. Две последние категории можно связать с очень старыми проблемами анализа, которые, таким образом, снова облекаются в геометрическую, вызывающую интуицию форму. Пусть дана, например, система обыкновенных дифференциальных уравнений с n переменными, из которых $n-1$ зависимые и одно независимое; можно ли рассматривать интегральные кривые этой системы как прямые в континууме, обладающем проективной связностью? Непосредственно видно, что это возможно только для частной формы уравнений, например в случае $n=2$, если данное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2y}{\partial x^2} = A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\frac{dy}{dx} + D \tag{44}$$

с коэффициентами A, B, C, D, заданными как функции от x и y. Проблема допускает тогда бесконечное множество решений, но среди всех проективных связностей, являющихся решением поставленной задачи, существует одна и только одна, внутренне связанная с данным уравнением. Это значит, что закон, по которому присоединяется проективная связность к дифференциальному уравнению, остается инвариантным при всякой замене переменных*.

Определяемая таким образом в двумерном пространстве (x, y) геометрия проективной связности, называемой *нормальной*, дает все свойства уравнения (44), не зависящие от выбора переменных x, y.

Если дифференциальное уравнение не имеет частной формы (44), если оно — произвольного вида, то его интегральные кривые можно еще рассматривать как прямые в про-

---

* Определение этой внутренней проективной связности составляет частный случай приложения метода подвижного репера, но прилагаемого к *бесконечной* группе G, а именно к группе всех точечных преобразований двух переменных.

странстве проективной связности, но при обязательном условии принять за образующий элемент геометрии не точку, а *линейный элемент* (совокупность точки и прямой, проходящей через эту точку), причем фундаментальной группой будет все время проективная группа плоскости; здесь среди всех проективных связностей, делающих интегралы дифференциального уравнения прямыми, еще есть одна привилегированная, и соответствующая геометрия дает все свойства дифференциального уравнения, которые не зависят от выбора переменных x, y.

Можно также рассматривать интегральные кривые произвольного дифференциального уравнения третьего порядка как окружности на плоскости, рассматривая континуум точек (x, y) как обобщенное пространство с основной группой — группой касательных преобразований, которые переводят ориентированный круг в ориентированный круг. Все еще существует привилегированная связность, и соответствующая геометрия дает все свойства дифференциального уравнения, инвариантные по отношению к произвольному касательному преобразованию.

46. Пространство с заданным элементом площади. Последний пример вернет нас к евклидовой геометрии. Известно, что Риман рассматривал для определения расстояния между двумя бесконечно близкими точками выражения более общие, чем квадратный корень из квадратичной дифференциальной формы. В случае двух измерений можно было бы взять какую-нибудь однородную и первого измерения относительно dx, dy функцию, которую всегда можно писать в виде $F(x, y, y')\,dx$, полагая $y' = \frac{dy}{dx}$. С другой стороны, вариационное исчисление в случае наиболее простого интеграла $\int F(x, y, y')\,dx$ приводит к понятиям, очень похожим на понятия элементарной геометрии; трансверсальность, например, имеет много аналогичного с перпендикулярностью. Некоторые авторы провели обобщение римановой геометрии, основанное на соображениях этого рода. Это обобщение входит в нашу общую схему. Можно сделать экстремали интеграла $\int F(x, y, y')\,dx$ евклидовыми *прямыми*, вводя евклидову связность, но надо тогда принять за образующий элемент не точку, а линейный элемент. Это сводится к тому, что в окрестности линейного элемента, рассматриваемого как элемент экстремали, пространство имеет характер евклидовой плоскости, но этот характер теряется, если рассматривать окрестность точки, т. е. совокупность линейных элементов, с цент-

ром в соседстве с данной точкой. Можно, следовательно, определить, как в евклидовой геометрии, угол двух бесконечно близких линейных элементов, расстояние между их центрами и т. д.; но важно отметить, что расстояние между центрами может меняться, если будем вращать два линейных элемента около их неподвижных центров.

Тот факт, что геометрию евклидовой связности можно внутренним образом построить на одном задании аналитического выражения расстояния двух бесконечно близких точек, приводит к вопросу, нельзя ли осуществить что-либо подобное, задавая в трехмерном континууме аналитическое выражение элемента площади поверхности. Весьма замечательно, что это вообще возможно; можно присоединить, согласно внутреннему закону, к интегралу $\iint F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$ евклидову связность, в которой этот интеграл будет изображать евклидову площадь поверхности. Но здесь есть исключения; я отмечу только случай интеграла $\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy$. Так как этот интеграл инвариантен относительно бесконечной группы точечных преобразований

$$\left.\begin{aligned} x' + iy' &= f(x+iy), \\ z' &= z + a, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где $f(x+iy)$ означает произвольную аналитическую функцию и a — произвольное постоянное, то, несомненно, невозможно присоединить к нему евклидову связность по внутреннему (т. е. инвариантному относительно какой угодно замены переменных) закону, ибо всякая евклидова связность может оставаться инвариантной только относительно группы, зависящей самое большее от шести параметров, тогда как она должна остаться инвариантной относительно бесконечной группы (45).

Предыдущий пример очень характерен. Прежде всего он доказывает возможность построения евклидовой дифференциальной геометрии в пространстве на одном понятии площади так же, как ее можно строить на одном понятии длины. Но он доказывает также, что если, обобщая евклидово аналитическое выражение *длины*, можно всегда строить геометрию, сохраняющую основные понятия евклидовой дифференциальной геометрии, то это уже не всегда так, если обобщать евклидово аналитическое выражение *площади*. И это дает возможность открыть новые горизонты даже на основы элементарной геометрии.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

I

1. Метод подвижного трехгранника систематически изложен Дарбу (G. Darboux) в его теории поверхностей: «*Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal*», т. I, кн. 1, гл. I, V, VII; т. II, кн. 5, гл. I, II, III, IV.

Движение трехгранника с одной степенью свободы и вся теория пространственных кривых изложены в гл. I первой книги; движение с несколькими степенями свободы — в гл. IV. Основные формулы теории поверхностей выведены методом подвижного трехгранника в пятой книге. Интегрирование дифференциальных уравнений, сюда относящихся, — в гл. II и VI первой книги. Кроме того, в первом томе рассеяно много различных частных случаев приложений метода.

Много общего имеет с ним метод Рибокура (Ribaucour) геометрии около поверхности, см.: Ribaucour. *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*. Journ. Math., сер. 4, т. VII, 1891.

3. Доказательство этой теоремы можно найти в цитированной книге Дарбу, т. I, гл. I, V.

II

5. Минимальные кривые в пространстве определяются условием: линейный элемент их $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ во всякой точке равен нулю. Это мнимые кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$x'^2+y'^2+z'^2=0, \tag{1}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по независимому переменному. Любой вектор, расположенный на касательной, имеет вид:

$$\mathbf{T}=\{\lambda x', \lambda y', \lambda z'\},$$

где в фигурных скобках записаны компоненты вектора и λ — любое число. Длина этого вектора равна нулю, ибо квадрат его — нуль:

$$\mathbf{T}^2=(\lambda x')^2+(\lambda y')^2+(\lambda z')^2=0$$

в силу уравнения (1). Иначе: вектор касательной τ перпендикулярен сам к себе, ибо

$$\mathbf{T}^2=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=0,$$

т. е. скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю.

Соприкасающаяся плоскость определяется как плоскость, содержащая два вектора τ и ν:

$$\tau=\{x', y', z'\}, \quad \nu=\{x'', y'', z''\}.$$

Дифференцируя равенство (1), получим:

$$x'x''+y'y''+z'z''=0.$$

Значит,

$$\tau\cdot\nu=0,$$

т. е. вектор ν перпендикулярен к касательной, а так как τ, как вектор касательной, тоже перпендикулярен сам к себе, то, следовательно, соприкасающаяся плоскость содержит две нормали — два вектора, перпендикулярных к касательной. Поэтому соприкасающаяся плоскость совпадает с нормальной плоскостью.

Так как главная нормаль кривой обычно определяется как пересечение соприкасающейся и нормальной плоскостей, то здесь она неопределенна.

Направления касательных к минимальным кривым называются *изотропными направлениями*, а прямые с этим направлением — *изотропными прямыми*. Изотропные прямые, выходящие из центра сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

образуют ее асимптотический конус

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Они, следовательно, проходят через мнимые бесконечно удаленные точки сферы. В каждой плоскости есть два таких направления; например, в плоскости $z = 0$ две прямые

$$x + iy = 0, \quad x - iy = 0$$

с угловыми коэффициентами $\pm i$.

10. Дифференциальное уравнение (1) минимальных кривых можно написать в виде:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

или

$$(dx + i\,dy)(dx - i\,dy) = -dz^2.$$

Вводим новое независимое переменное t посредством уравнений

$$\frac{dx + i\,dy}{-dz} = \frac{dz}{dx - i\,dy} = t,$$

откуда

$$dx + i\,dy = -t\,dz,$$

$$dx - i\,dy = \frac{dz}{t}$$

и

$$\frac{dx}{1 - t^2} = \frac{dy}{i(1 + t^2)} = \frac{dz}{2t} = \frac{1}{2} F(t)\,dt.$$

В правой части мы ввели новую неизвестную функцию $F(t)$. Эта функция, очевидно, остается произвольной, и мы имеем

$$dx = \frac{1}{2}(1 - t^2) F(t)\,dt,$$

$$dy = i(1 + t^2) F(t)\,dt,$$

$$dz = tF(t)\,dt.$$

Формулы текста отсюда непосредственно вытекают.

Weierstrass. *Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist.* Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, стр. 612 и 855.

См. также: Darboux, т. I, стр. 339 (изд. 1914 г.) или Егоров, *Дифференциальная геометрия*, стр. 158, где эти формулы приведены без знака интеграла.

Cartan. *Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes.* Bull. de la Soc. Math. de France, т. 42, 1914, стр. 12—48.

Автор ищет семейства кривых, определяемых заданным соотношением между кривизной, кручением и производной от кривизны по дуге так, чтобы уравнения кривых могли быть написаны без знака интеграла. Кроме сферических кривых и винтовых линий, он находит три семейства мнимых кривых, тесно связанных с минимальными линиями и позволяющих дать несколько интересных истолкований их псевдодуг.

III

Построение подвижного репера в аффинной геометрии (и как частный случай в геометрии подобий и в евклидовой) см.: Cartan. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* Annales de l'École Normale superieure, т. 40, 1923, стр. 325—412; т. 41, 1924, стр. 1—25; т. 42, 1925, стр. 17—88.

Мемуар посвящен (кроме теории относительности) исследованию обобщенных пространств аффинной связности. Теория кривых затронута сравнительно мало.

IV

13. Tresse. *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations.* Acta Mathematica, т. 18, 1894, стр. 1—88.

Автор дает общую теорию дифференциальных инвариантов на основе теории групп С. Ли и применяет ее к отысканию дифференциальных инвариантов поверхности в конформной и проективной геометриях.

Cartan. *Sur un problème du calcul des variations en géometrie projective plane.* Математический сборник, Москва, т. 34, 1927, стр. 349—364.

Основная задача — определение в эллиптических функциях всех кривых, осуществляющих экстремум проективной дуги.

V

15. F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen, 1872, Mathematische Annalen, т. 43, 1893, стр. 63; см. также в собрании сочинений.

16. Предшественником Картана в обобщении метода подвижного трехгранника является Коттон (Cotton).

E. Cotton. *Généralisation de la théorie du trièdre mobile.* Bulletin de la Société Math. de France, т. 33, 1905, стр. 42—64.

Еще ранее Демулен (Demoulin) применял подвижную систему отнесения в конформной и проективной геометриях. См. его заметки в Comptes Rendus, Paris, т. 141, 1905, стр. 302. Картан дал обобщение метода подвижного трехгранника в статье: Cartan. *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile.* Bull. de la Soc. Math. de France, сер. 2, т. 34, 1910, стр. 1—34.

Автор прилагает построенный репер к изучению в евклидовой геометрии мнимых поверхностей с совпадающими линиями кривизны и изотропных развертывающихся поверхностей.

20. S. Lie, G. Scheffers. *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen.* Leipzig, 1893, стр. 391, уравнение (9).

VI

23. Вторая теорема теории групп, см. L i e — S c h e f f e r s, стр. 380.

Связь теории групп и геометрии см.: C a r t a n. *La géometrie des groupes de transformations.* Journal de Mathemat., т. 6, 1927, стр. 1—119.

C a r t a n. *La théorie des groupes et la géometrie.* Conférence faite à la Soc. Math. Suisse à Berne le 7 mai 1927, L'Enseignement Mathemat., т. 26, 1927, стр. 200—225.

A. B u h l. *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis.* Memorial des Sciences Math., вып. 33, 1928.

Автор выводит теорию групп из геометрических рассуждений Картана.

Относительно билинейных ковариантов, внешнего дифференцирования и теории Картана уравнений в инволюции см.: C a r t a n. *Sur certaines expressions différentielles et la problème de Pfaff.* Annales de l'École norm. sup., сер. 3, т. 16, 1899, стр. 239—332.

C a r t a n. *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales.* Annales de l'École norm sup., сер. 3, т. 18, 1901, стр. 241—311.

C a r t a n. *Leçons sur les invariants integraux,* 1922.

G o u r s a t. *Leçons sur le problème de Pfaff,* 1922.

26. Доказательство можно найти в книге: C a r t a n. *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann.* Paris, 1928; см. также *Риманова геометрия в ортогональном репере* (по лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926—1927 гг.). Изд-во МГУ, 1960.

Третья теорема теории групп: L i e — S c h e f f e r s, стр. 395.

VII

Последовательное определение репера, внутренним образом связанного с поверхностью в проективном пространстве трех измерений, см.: C a r t a n. *Sur la déformation projective des surfaces.* Annales de l'École normale sup., т. 37, 1920, стр. 259—356.

Основная задача мемуара — исследование проективного изгибания поверхности.

X

Теория относительности и обусловленный ею интерес к многомерной геометрии вызвали появление целого ряда работ, последовательно обобщавших риманово пространство. Первой была работа В е й л я (H. W e y l):

H. W e y l. *Reine Infinitesimalgeometrie.* Mathem. Zeitschr., т. 2, 1918, стр. 384—411.

H. W e y l. *Zur Infinitesimalgeometrie, Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung, Göttingen Nachricht,* 1921, стр. 99—112.

См также: H. W e y l. *Raum, Zeit, Materie,* первое издание 1918 г.

В схеме Картана пространство Вейля — пространство без кручения в геометрии группы подобий. Затем Э д д и н г т о н (E d d i n g t o n) построил более общее пространство, тоже без кручения, аффинной связности.

A. S. E d d i n g t o n. *A generalisation of Weyl's Theory of the electromagnetic and gravitational fields.* Proceedings of the Royal Soc. of London, сер. A, т. 99, 1921, стр. 104—122. См. также: A. E d d i n g t o n. *The mathematical theory of Relativity.* Cambridge, 1923.

В это время стали появляться заметки Картана:

E. Cartan. *Sur une définition géometrique du tenseur d'énergie d'Einstein.* Comptes Rend., т. 174, 1922, стр. 437.

Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, там же, стр. 593.

Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité, там же, стр. 734.

Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique, там же, стр. 857.

Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'éxpression analytique du tenseur d'Einstein, там же, стр. 1104.

Опубликованные здесь основы построения пространства аффинной и конформной связности с кривизной и кручением подробно развиты в большом мемуаре в трех частях: E. Cartan. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* Annales de l'École Norm,. sup., т. 40, 1923, стр. 325—412; т. 41, 1924, стр. 1—25; т. 42, 1925, стр. 17—88.

Здесь содержится все то учение о метрическом и аффинном обобщенных пространствах, основы которого даны в гл. IX и X текста. Теория пространства конформной и проективной связности развита в мемуарах:

E. Cartan. *Les espaces à connexion conforme.* Annales de la Société Polonaise Math., т. 2, 1923, стр. 171—221.

E. Cartan. *Sur les variétés à connexion projective.* Bull. Société Math. de France, т. 52, 1924, стр. 205—241.

Около этого же времени (т. е. времени опубликования первых статей Картана) появились работы Схоутена (Schouten):

J. A. Schouten. *Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die einer Differentialgeometrie zu Grunde gelegt werden können.* Math., Zeitschr., т. 13, 1922, стр. 56—81, *Nachtrag*, там же, т. 15, стр. 168.

J. A. Schouten. *Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen, I, II.* Math. Zeitschr., т. 17, 1923, стр. 161—188, где в основу обобщения пространства положена идея параллельного переноса, и работы американской школы.

L. P. Eisenhart and O. Veblen. *The Riemannian geometry and its generalisation.* Proceedings of the National As. of Science, т. 8, 1922.

L. P. Eisenhart. *The geometry of paths and general relativity.* Ann. of Math., сер. 2, т. 24, 1922—1923, стр. 367—392.

O. Veblen and T. Y. Thomas. *The geometry of paths.* Transactions of the Amer. Math. Soc., т. 25, 1923, стр. 551—668.

Попытку распространить метод параллельного переноса на обобщение пространств проективной и конформной связности можно найти в статье:

J. A. Schouten. *Erlangen Programm und Übertragungslehre.* Rend. Circolo Math. di Palermo, т. 50, 1926, стр. 1—28.

Полное изложение этого направления можно найти в книгах:

D. I. Struik. *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in directer Darstellung.* Berlin, 1922; эта книга содержит полную библиографию.

J. Schouten. *Der Ricci — Kalkül.* Berlin, 1924.

L. P. Eisenhart. *Non-riemanniani geometry.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, т. 8, New York, 1927; содержит краткую библиографию.

42. Levi-Civita. *Nozione de parallelismo in una varieta qualunque.* Rendiconti di Circolo Math. di Palermo, т. 42, 1917, стр. 173—205.

43. О группе голономии см.:

E. C a r t a n. *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés.* Acta Mathematica, т. 48, 1926, стр. 1—42.

E. C a r t a n. *La théorie des groupes et les recherches récentes de géometrie différentielle.* Conférence, faite au Congrés international de Toronto en 1924; L'Enseignement Math., т. 24, 1925, стр. 1—18.

45. См. цитированную статью Картана: *Sur les var. à conn. proj., a* также E. C a r t a n. *La cinématique newtonienne et les espaces à connexion euclidienne.* Bull. math. Soc. roumoine des Sciences, т. 35, 1933.

46. См. E. C a r t a n. *Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés.* Mathematica, т. 4, 1930, стр. 114—136, где приведена и некоторая библиография, а также: L. B e r w a l d. *Über zweidimensiomale allgemeine metrische Räume.* J. f. reine u. ang. Math., т. 156, 1927, стр. 191—222 и его же: *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus* Math. Zeitschr., т. 25, 1926, стр. 40—73. См. также: E. C a r t a n. *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire.* Exposés de Géométrie, I, 1933; E. C a r t a n. *Les espaces de Finsler.* Exposés de Géométrie, II, 1934.

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ИЗЛОЖЕННЫЕ МЕТОДОМ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

6 Зак. 410

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Известно, какую роль играет понятие группы во всех разделах математики. Это понятие лежит в основе даже элементарной геометрии, как это показал Пуанкаре; и современное развитие геометрии беспрестанно демонстрирует растущую важность этого понятия даже в таких геометрических теориях, как риманова геометрия и ее обобщения, которые долго казались независимыми. В настоящей книге, которая воспроизводит с некоторыми изменениями курс, прочитанный в Сорбонне в зимнем семестре 1931/32 года, проводится совместное изучение основных теорем теории конечных и непрерывных групп Софуса Ли и принципов, на которых основывается метод подвижного репера в дифференциальной геометрии. Действительно, между этими двумя математическими дисциплинами существует очень тесная связь, которую поможет понять следующее замечание: классические уравнения Дарбу, которым подчиняется всякое зависящее от нескольких параметров движение триортогонального подвижного триэдра, есть не что иное, как *уравнения структуры* группы евклидовых перемещений, если придавать этому выражению «уравнения структуры» смысл, который оно имеет в теории структур непрерывных (конечных или бесконечных) групп Ли, которую я изложил в 1904—1905 гг. Уравнения Дарбу содержат в себе поэтому всю евклидову дифференциальную геометрию. Когда переходят от элементарной геометрии к геометрии, основанной на некоторой группе G, уравнения Дарбу заменяются уравнениями, установленными в 1888 г. Маурером, значение и важность которых долго не признавали: это те самые уравнения Маурера, которые

лежат в основе всякой дифференциальной геометрии, основанной на группе G; и мы с ними обязательно встретимся, как только захотим распространить на такую геометрию метод подвижного триэдра.

Книга разделена на три части. Первая часть имеет целью познакомить читателя с методом подвижного триэдра в евклидовой геометрии, особенно со случаями, оставленными в стороне Дарбу, где выбор для использования подвижного триэдра не проходит непосредственно и, следовательно, ставит предварительную задачу; решение этой задачи основывается на общем принципе, который получает здесь первые приложения (теория минимальных кривых и линейчатых поверхностей с изотропными образующими).

Во второй части вводятся реперы, присоединенные к какой-нибудь группе, и излагаются первые понятия теории конечных и непрерывных групп и принципов общего метода подвижного репера. Наконец, в третьей части вводятся уравнения структуры Маурера—Картана, показывается их использование в теории подвижного репера и их роль в третьей основной теореме Софуса Ли; последняя глава посвящена исследованию структуры конечных групп, рассматриваемых с классической точки зрения Софуса Ли.

Редакция текста почти целиком принадлежит Жану Лерэ, прекрасные работы которого в других областях математики хорошо известны. Я должен подчеркнуть, что Ж. Лерэ не ограничивался простым редактированием курса лекций, он заново переработал материал, улучшил его в некоторых важных местах и более рационально расположил.

Я выражаю здесь Ж. Лерэ мою благодарность за ценное сотрудничество, которое, я в этом уверен, содействовало тому, чтобы сделать более доступными теории, изложенные в этой книге.

Мне также приятно поблагодарить Жюлиа за то, что он снова принял этот курс в свою серию. Выражаю также свою благодарность издательству Готье-Виллар, которое, как всегда, проявило заботу при издании книги.

Э. Картан

Часть первая

МЕТОД ПОДВИЖНОГО ТРЕХГРАННИКА В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

ВВЕДЕНИЕ

1. Рибокур первый изучал дифференциальные свойства поверхностей с помощью подвижного триортогонального триэдра. Дарбу исключительно плодотворно использовал его в «*Лекциях по общей теории поверхностей*» [1] *. В действительности это было результатом обращения к свойствам группы движений в пространстве; в дальнейшем мы будем придерживаться этой точки зрения. Впрочем, как заметил Пуанкаре, понятие группы движений всегда играло основную роль в геометрии: равенство двух фигур определяется возможностью их совместить, т. е. преобразовать одну в другую посредством движения **.

Аффинная, конформная, проективная и т. д. геометрии излагаются также с помощью подвижных реперов; между свойствами подвижного репера и свойствами аффинной, конформной, проективной и т. д. групп имеется существенная связь, как мы покажем во всех подробностях.

* Числа в квадратных скобках относятся к библиографическому указателю в конце книги.

** Выскажем три аксиомы геометрии; всякая фигура F равна самой себе; если F равна F', то F' равна F; если F равна F' и F' равна F'', то F равна F''. Эти три аксиомы эквивалентны следующим: тождественное преобразование (которое оставляет неподвижной каждую точку пространства) есть движение; преобразование, обратное движению, есть движение; преобразование, получаемое последовательным выполнением двух движений, есть движение. Но эти три свойства движений, которые мы привели, являются свойствами, которыми определяется совокупность преобразований, образующих группу. Этот пример показывает, как можно использовать равным образом аксиомы равенства фигур или аксиомы их движений.

Более того, использование подвижных реперов позволяет даже изучать структуру произвольной «конечной, непрерывной» группы и, между прочим, установить три основные теоремы Софуса Ли, не теряя из виду геометрической интерпретации рассуждений.

Эта первая часть курса предназначена исключительно для того, чтобы познакомить читателя с применением метода подвижного репера.

Глава I

ПОДВИЖНОЙ ТРИОРТОГОНАЛЬНЫЙ ТРИЭДР. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

I. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ ТРИОРТОГОНАЛЬНОГО ТРИЭДРА *

2. Некоторые понятия кинематики. Пусть дано движущееся твердое тело. Для геометра удобно присоединить к нему правый триортогональный триэдр T. Пусть A — его вершина, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ — три единичных вектора, имеющие началом точку A и расположенные на трех ребрах T (фиг. 1).

Если M — произвольная точка твердого тела, то компоненты x, y, z вектора $\overrightarrow{AM}$, отнесенного к этому триэдру, будут константами.

Дифференцирование векторного соотношения

$$\overrightarrow{AM} = x\mathbf{I}_1 + y\mathbf{I}_2 + z\mathbf{I}_3$$

показывает, что скорость точки M равна **

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + x\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} + y\frac{d\mathbf{I}_2}{dt} + z\frac{d\mathbf{I}_3}{dt}.$$

---

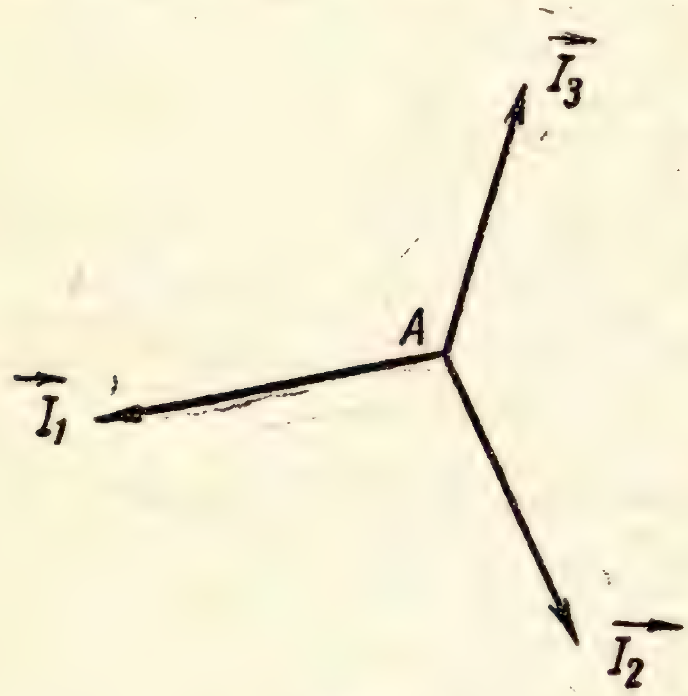
* См. Г. Дарбу [1], т. I, кн. 1, гл. I, V и VII.

** $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ — вектор, компоненты которого будут производными от координат точки A, $\dfrac{d\mathbf{I}_1}{dt}$ — вектор, компоненты которого будут производными от компонент вектора $\mathbf{I}_1$.

Знание скорости движения каждой точки твердого тела вытекает, следовательно, из знания двенадцати компонент векторов

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{I}_1}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{I}_2}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{I}_3}{dt}.$$

Относить эти векторы к какому-нибудь неподвижному триэдру T_0 не стоит, так как значения их компонент зависели бы тогда и от выбора T, и от выбора T_0. Мы будем относить их к самому триэдру T так, чтобы они зависели от наименьшего числа произвольных постоянных. Положим, следовательно,



Фиг. 1

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \xi_1\mathbf{I}_1 + \xi_2\mathbf{I}_2 + \xi_3\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} &= p_{11}\mathbf{I}_1 + p_{12}\mathbf{I}_2 + p_{13}\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_2}{dt} &= p_{21}\mathbf{I}_1 + p_{22}\mathbf{I}_2 + p_{23}\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_3}{dt} &= p_{31}\mathbf{I}_1 + p_{32}\mathbf{I}_2 + p_{33}\mathbf{I}_3.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Различные скалярные произведения $\mathbf{I}_k \cdot \mathbf{I}_l$ — постоянные величины. Поэтому

$$\mathbf{I}_k d\mathbf{I}_l + \mathbf{I}_l d\mathbf{I}_k = 0,$$

т. е.

$$p_{kl} + p_{lk} = 0,$$

и формулы (1) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \xi_1\mathbf{I}_1 + \xi_2\mathbf{I}_2 + \xi_3\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} &= \qquad\qquad p_{12}\mathbf{I}_2 + p_{13}\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_2}{dt} &= -p_{12}\mathbf{I}_1 \qquad\quad + p_{23}\mathbf{I}_3,\\
\frac{d\mathbf{I}_3}{dt} &= -p_{13}\mathbf{I}_1 \quad - p_{23}\mathbf{I}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Шести функций ξ_1, ξ_2, ξ_3, p_{12}, p_{13}, p_{23} вполне достаточно, чтобы определить скорости всех точек твердого тела в каждый момент времени t. Известно, впрочем, что эти скорости

можно получить, если выполнить одновременно перенос, определяемый вектором (ξ_1, ξ_2, ξ_3), и вращение, определяемое вектором $(p_{23}, -p_{13}, p_{12})$.

3. Движения, зависящие от нескольких параметров (с несколькими степенями свободы). Рассуждения п. 2 находят приложения в различных вопросах геометрии. Полезно обобщить их, чтобы расширить поле приложений.

Рассмотрим трехгранник T, зависящий* от ρ параметров $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$. Пусть точка M неразрывно связана с трехгранником; мы имеем

$$\overrightarrow{AM} = x\mathbf{I}_1 + y\mathbf{I}_2 + z\mathbf{I}_3,$$

где x, y, z — три константы; существует ρ систем соотношений вида

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u_q} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_q} + x\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial u_q} + y\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial u_q} + z\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u_q},\\
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_q} &= \xi_{1q}\mathbf{I}_1 + \xi_{2q}\mathbf{I}_2 + \xi_{3q}\mathbf{I}_3,\\
\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial u_q} &= \qquad\qquad p_{12q}\mathbf{I}_2 + p_{13q}\mathbf{I}_3,\\
\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial u_q} &= -p_{12q}\mathbf{I}_1 \qquad\qquad + p_{23q}\mathbf{I}_3,\\
\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u_q} &= -p_{13q}\mathbf{I}_1 - p_{23}\mathbf{I}_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Использование обозначения дифференциала позволяет объединить эти ρ систем в одну. Положим

$$d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u_\rho}du_\rho,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\mathbf{I}_3 = \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u}du_1 + \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u_\rho}du_\rho.$$

---

* Мы всегда будем рассматривать случаи, когда множество значений параметров образует область и координаты различных точек трехгранника так же, как производные первого и второго порядков, являются непрерывными функциями параметров (функциями класса C^2).

Тогда получим:

$$
\left.\begin{aligned}
d\mathbf{M} &= d\mathbf{A} \qquad + x d\mathbf{I}_1 + y d\mathbf{I}_2 + z d\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{A} &= \omega_1 \mathbf{I}_1 + \omega_2 \mathbf{I}_2 + \omega_3 \mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_1 &= \qquad\qquad \omega_{12}\mathbf{I}_2 + \omega_{13}\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{I}_1 \qquad\qquad + \omega_{23}\mathbf{I}_3,\\
d\mathbf{I}_3 &= -\omega_{13}\mathbf{I}_1 - \omega_{23}\mathbf{I}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

Здесь ω — линейные однородные формы относительно du_q, коэффициенты которых — функции переменных u_q. Такие формы называются *формами Пфаффа.* Мы будем называть их *относительными компонентами инфинитезимального смещения триэдра.*

Будем рассматривать пока дифференциалы du_q как бесконечно малые; предположим, что все эти формы ω, кроме формы ω_1, равны нулю: испытываемое точкой M перемещение будет переносом, параллельным вектору $\mathbf{I}_1$, на расстояние ω_1. Предположим теперь все формы равными нулю, кроме ω_{12}; перемещение, испытываемое точкой M, с точностью до бесконечно малого второго порядка, будет вращением около оси $\mathbf{I}_3$ на угол ω_{12}.

Формулы (4) показывают, следовательно, как наиболее общее инфинитезимальное перемещение получается в результате наложения трех инфинитезимальных переносов, соответственно параллельных трем ребрам репера T, и трех инфинитезимальных поворотов вокруг этих ребер.

4. Геометрический смысл относительных компонент. Пусть дано семейство трехгранников, зависящее от одного или нескольких параметров $u_1, \ldots, u_\rho$. Формы Пфаффа $\omega_1, \ldots, \omega_{23}$ вполне определены, если заданы трехгранники, соответствующие значениям параметров (u_q) и $(u_q + du_q)$; они зависят только от относительного положения этих двух трехгранников. Их значения не меняются, если сместить совокупность трехгранников семейства или изменить выбор параметров.

Функции ξ_{iq} и p_{ijq} зависят от относительного положения этих трехгранников и от выбранных параметров. Следовательно, во всех вопросах, когда параметры не существенны, выбор функций ξ_{iq}, p_{ijq} менее удобен, чем выбор форм ω. Мы будем систематически пользоваться формами. Этот геометрический смысл компонент ω имеет *важное следствие.* Пусть заданы два равных семейства трехгранников и пусть два трехгранника T_1 и T_2 первого семейства соответствуют

значениям (u_q) и (u_q+du_q) параметров. Пусть T_1^* и T_2^* — соответствующие трехгранники второго семейства; пусть (v_q) и (v_q+dv_q) — их параметры. Фигура (T_1, T_2) равна фигуре (T_1^*, T_2^*); трехгранник T_2 расположен относительно T_1 так же, как трехгранник T_2^* расположен относительно T_1^*. Отсюда следуют равенства:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i(u, du) &= \omega_i(v, dv), \\ \omega_{ji}(u, du) &= \omega_{ji}(v, dv). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

5. Одна задача интегрирования. Выясним теперь, будет ли справедлива обратная теорема, для чего рассмотрим сначала следующую задачу интегрирования: найти все семейства трехгранников, соответствующих *a priori* заданным формам ω_i, ω_{ij}. В начале третьей части этого курса мы обнаружим, что формы ω подчинены известным условиям совместности, если семейство трехгранников зависит более чем от одного параметра. Мы будем говорить, что *структура* этих форм не произвольна, и будем называть эти условия *уравнениями структуры*.

Но в первую очередь мы будем рассматривать семейства трехгранников, зависящие от одного параметра t; предположим, следовательно, что нам даны формы *,

$$\omega_i = \xi_i(t)\,dt, \quad \omega_{ji} = p_{ji}(t)\,dt \quad (i = 1, 2, 3;\ j < i).$$

Я утверждаю, что им соответствуют семейства трехгранников и что все эти семейства конгруэнтны между собой. В силу результатов предыдущего пункта это предложение эквивалентно следующему: существует одно и только одно семейство трехгранников T, которые допускают эти формы компонентами своих инфинитезимальных перемещений и в котором элементом, соответствующим $t=0$, служит *a priori* заданный трехгранник.

Выберем этот трехгранник за трехгранник отнесения и примем следующие обозначения:

x, y, z — координаты точки A, вершины трехгранника T,
α, β, γ — компоненты первого вектора $\mathbf{I}_1$,
α', β', γ' — компоненты второго вектора $\mathbf{I}_2$,
$\alpha'', \beta'', \gamma''$ — компоненты третьего вектора $\mathbf{I}_3$.

Мы получим три системы соотношений, связывающих эти неизвестные, рассматривая последовательно компоненты по

---

* Предполагается, что функции $\xi_i(t)$ и $p_{ji}(t)$ определены для всех действительных значений t и допускают непрерывные частные производные первого порядка.

трем осям координат векторов, фигурирующих в системе (2); первой из этих систем будет система:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \xi_1\alpha + \xi_2\alpha' + \xi_3\alpha'',\\
\frac{d\alpha}{dt} &= p_{12}\alpha' + p_{13}\alpha'',\\
\frac{d\alpha'}{dt} &= -p_{12}\alpha + p_{23}\alpha'',\\
\frac{d\alpha''}{dt} &= -p_{13}\alpha - p_{23}\alpha'.
\end{aligned}\right\} \qquad (2_1)$$

Эта система (2_1) допускает одно такое решение, что при $t=0$:

$$x=0,\ \alpha=1,\ \alpha'=0,\ \alpha''=0.$$

Рассматривая так же две другие системы, мы установим, что существует только один триэдр, зависящий от t и удовлетворяющий системе (2), который при $t=0$ совпадает с триэдром отнесения.

Остается проверить, будет ли переменный трехгранник триортогональным и будет ли каждый из векторов $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ иметь длину, равную 1. Но из системы (2) вытекают шесть соотношений:

$$\frac{d(\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{I}_j)}{dt}=\sum_{k=1}^{3}p_{ik}(\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{I}_k)+\sum_{k=1}^{3}p_{jk}(\mathbf{I}_j\cdot\mathbf{I}_k);$$

здесь $p_{ij}=-p_{ji}$.

Эти соотношения образуют линейную систему относительно шести величин $(\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{I}_j)$; единственное решение, удовлетворяющее наложенным начальным условиям, очевидно; это

$$\mathbf{I}_1^2=\mathbf{I}_2^2=\mathbf{I}_3^2=1;\quad \mathbf{I}_1\cdot\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_2\cdot\mathbf{I}_3=\mathbf{I}_3\cdot\mathbf{I}_1=0.$$

Таким образом, доказываемое утверждение установлено.

6. Равенство двух семейств, зависящих от ρ параметров и имеющих одни и те же относительные компоненты. Приступим к доказательству предложения, обратного доказанному в п. 4 [формулы (5)]: пусть даны два семейства трехгранников T и T^*, зависящие соответственно от ρ параметров $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ и $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$; предположим, что установлен-

ное между T и T^* взаимно однозначное и непрерывное соответствие приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned} \omega_i(u, du) &= \omega_i^*(v, dv), \\ \omega_{ji}(u, du) &= \omega_{ji}^*(v, dv). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выберем два трехгранника T_1 и T_2 в первом семействе; пусть T_1^* и T_2^* — соответствующие им трехгранники второго семейства, тогда можно найти* однопараметрическое, зависящее от параметра t семейство трехгранников T_3, принадлежащих первому семейству и таких, что трехгранник T_3 совпадает с трехгранником T_1 при $t=0$ и с трехгранником T_2 при $t=1$. Пусть T_3^* — трехгранник, соответствующий трехграннику T_3; компоненты ω^* инфинитезимального смещения T_3^* будут равны компонентам ω инфинитезимального смещения трехгранника T_3. В предыдущем пункте утверждалось, что при этих условиях перемещение, которое приводит к совпадению трехгранники T_1 и T_1^*, совмещает соответствующие трехгранники T_3 и T_3^*; следовательно, оно совмещает, в частности, T_2 и T_2^*. Но трехгранники T_2 и T_2^* — произвольные элементы семейств T и T^*. Следовательно, это перемещение совмещает все соответствующие элементы двух семейств T и T^*.

Сформулируем теперь результаты, полученные в пп. **4** и **6**.

7. Основное условие равенства. *Пусть установлено взаимно однозначное соответствие между двумя семействами триортогональных трехгранников T и T^*, каждое из которых зависит от ρ параметров. Чтобы одно и то же перемещение могло совместить все соответствующие трехгранники этих семейств, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемое соответствие приводило к равенству компонент ω инфинитезимального смещения трехгранника T компонентам ω^* инфинитезимального смещения соответствующего трехгранника T^*.*

Отметим, с другой стороны, заключение п. **5**.

Теорема структуры. *Компоненты инфинитезимального смещения триортогонального подвижного трехгранника, зависящего от одного параметра, не подчиняются никаким условиям структуры* (иначе говоря, эти компоненты — абсолютно произвольные формы).

8. Замечания к п. 5. В этом пункте мы охарактеризуем положение произвольного трехгранника пространства посред-

---

* Ибо семейства предполагаются непрерывными (см. сноску к п. **3**, стр. 89).

ством 12 параметров, связанных шестью соотношениями: этими параметрами будут величины x, y, z, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', а соотношениями — равенства $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$, ...

Отсюда вытекают осложнения для предполагаемых нами дальнейших обобщений. Будем поэтому пользоваться для определения трехгранника шестью независимыми параметрами: это будут, например, три координаты (x, y, z) вершины и три эйлеровых угла (φ, θ, ψ). Докажем заново заключение п. 5.

«Можно одним и только одним способом выбрать параметры x, y, z, φ, θ, ψ как функции параметра t так, чтобы при $t=0$ трехгранник занимал определенное положение и чтобы компоненты его инфинитезимального смещения ω_i, ω_{ji} $(j<i)$ были равны заданным формам ξ_i (t) dt, p_{ji} dt».

Допустим, что ω_i и ω_{ji} $(j<i)$ будут независимыми формами от шести дифференциалов dx, dy, dz, $d\varphi$, $d\theta$, $d\psi$; система

$$\omega_i = \xi_i(t)\,dt, \quad \omega_{ji} = p_{ji}(t)\,dt$$

эквивалентна системе шести дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f_4(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t), \quad \frac{d\theta}{dt} = f_5(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t), \quad \frac{d\psi}{dt} = f_6(x, y, z, \varphi, \theta, \psi, t);$$

эта система допускает одно и только одно решение, соответствующее при $t=0$ заданным значениям неизвестных; предложение, которое мы имели в виду, доказано.

Но предположение, что шесть форм ω_i, ω_{ji} зависимы, абсурдно, ибо в случае зависимости можно было бы действительно найти систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{g_1(x, y, z, \varphi, \theta, \psi)} = \frac{dy}{g_2} = \frac{dz}{g_3} = \frac{d\varphi}{g_4} = \frac{d\theta}{g_5} = \frac{d\psi}{g_6},$$

интегралы которой обращали бы в нуль эти шесть форм: тогда существовали бы подвижные трехгранники, компоненты инфинитезимального смещения которых были бы равны

нулю и каждая точка относительно которых была бы, следовательно, неподвижна, чего не может быть.

Таким образом, заключение п. **5** доказано лучше с помощью других, менее сложных рассуждений. Интересно отметить, что в вопросе относительно семейств трехгранников, зависящих только от одного параметра, мы использовали компоненты инфинитезимального смещения наиболее общего трехгранника.

II. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СЕМЕЙСТВ ТРЕХГРАННИКОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ОДНОГО ПАРАМЕТРА, К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

9. Различные геометрические элементы, присоединенные к кривой. Напомним бегло классическую теорию кривых в пространстве. Пусть C — действительная пространственная кривая. Начинают с определения в каждой из ее точек, с помощью различных построений дифференциальной геометрии, *касательной* и дифференциала *длины дуги* ds; чтобы выбрать знак ds, необходимо *ориентировать* кривую; затем определяются *соприкасающаяся плоскость, главная нормаль* и *бинормаль*.

Заметим, что касательная — геометрический элемент первого порядка, что соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль — геометрические элементы второго порядка *; это означает просто, что две кривые, имеющие касание первого порядка, имеют общую касательную и что они имеют общую соприкасающуюся плоскость, общую главную нормаль, общую бинормаль, если они имеют касание второго порядка. Напомним, что совокупность кривых, каждая пара которых имеет в заданной точке касание порядка p, образует *элемент касания порядка* p; говорят, что этот элемент принадлежит каждой из этих кривых.

Предположим, что рассматриваемые кривые определены функциями $y(x)$, $z(x)$ и что их касательные не параллельны плоскости yz; элемент касания порядка p аналитически может быть охарактеризован заданием значения x и соответствующих значений, принимаемых функциями

$$y(x),\ z(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ldots,\frac{d^py}{dx^p},\ \frac{d^pz}{dx^p};$$

дифференциал ds есть *дифференциальный элемент первого порядка*: это означает, что он может быть выражен с помо-

---

* Мы исключаем из рассмотрения точки перегиба линии C.

щью *дифференциала* dx и координат элемента касания первого порядка.

10. Относительные компоненты смещения трехгранника Френе. Рассмотрим в каждой точке A линии C правый триортогональный трехгранник $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, обладающий следующими свойствами: каждый из ортогональных друг другу векторов $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ имеет длину, равную единице; вектор $\mathbf{I}_1$ лежит на положительной полукасательной, $\mathbf{I}_2$ — на главной нормали, $\mathbf{I}_3$ — на бинормали. К каждой точке M, таким образом, будут присоединены два трехгранника; они переходят друг в друга при замене $\mathbf{I}_2$ на $-\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ на $-\mathbf{I}_3$.

Когда точка M описывает линию C, каждый из этих трехгранников порождает непрерывное семейство трехгранников. Эти трехгранники будут геометрическими элементами второго порядка.

Введем относительные компоненты ω инфинитезимального смещения одного из этих трехгранников. Касательная определяется соотношениями $\omega_2=0$, $\omega_3=0$; длина дуги ds — соотношением $\omega_1=ds$; главная нормаль — соотношением $\omega_{13}=0$; формы ω_{12} и ω_{23} будут иметь вид: $\omega_{12}=\rho ds$, $\omega_{23}=\tau ds$, где ρ и τ — функции от s. При этих условиях формулы (4) дают *формулы Френе:*

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= ds\,\mathbf{I}_1, \\ d\mathbf{I}_1 &= \rho\,ds\,\mathbf{I}_2 \\ d\mathbf{I}_2 &= -\rho\,ds\,\mathbf{I}_1 + \tau\,ds\,\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= -\tau\,ds\,\mathbf{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Если мы рассмотрим другой трехгранник $M\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, то ρ изменится на $-\rho$, τ сохранит свое значение. Для одного из этих трехгранников ρ будет положительно; этот трехгранник мы назовем *трехгранником Френе*; для его определения необходимо только знание элемента касания второго порядка; поэтому мы назовем его также *трехгранником второго порядка.* К нему мы применим формулы Френе (6). Функции ρ и τ, имеющие внутренний смысл, будут *кривизной* и *кручением*; их называют также инвариантами второго и третьего порядков.

Формулы Френе позволяют посредством дифференцирования легко подсчитать ρ и τ, исходя из первоначальных уравнений линии C. Они показывают, что, при изменении ориентации C, ρ и τ сохраняют те же самые значения, в то время как ds умножается на -1; эти формулы дают геометриче-

скую интерпретацию ρ и τ; заметим, наконец, что они позволяют вычислить в точке A

$\frac{d\mathbf{A}}{ds}$, если известен в этой точке $\mathbf{I}_1$;

$\frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}$, если известны в этой точке $\mathbf{I}_2$ и ρ;

$\frac{d^3\mathbf{A}}{ds^3}$, если известны в этой точке $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \rho, \frac{d\rho}{ds}, \tau$;

$\frac{d^p\mathbf{A}}{ds^p}$, если известны в этой точке $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \rho, \ldots, \frac{d^{p-2}\rho}{ds^{p-2}}, \tau, \ldots, \frac{d^{p-3}\tau}{ds^{p-3}}$.

11. Полученных результатов достаточно, чтобы разрешить две естественно возникающие проблемы.

Проблема касания. *Пусть даны целое число p, две действительные кривые C и C^*, две точки этих кривых A_0 и A_0^*. Найти все перемещения, которые переводят A_0^* в A_0 и C^* в кривую, имеющую в точке A_0 с кривой C касание, порядок которого не меньше p.*

Проблема равенства. *Найти все перемещения, которые совмещают две заданные действительные кривые C и C^*.*

Нам будет *удобно* говорить, что две *ориентированные* кривые имеют в некоторой точке касание порядка p только в том случае, когда они действительно имеют в этой точке такое касание (отвлекаясь от их ориентации) и, кроме того, когда совпадают в этой точке их положительные полукасательные. Точно так же будем говорить, что перемещение совмещает две ориентированные кривые только в том случае, когда оно их совмещает с совпадением ориентации.

Решения проблемы касания складываются из решений двух проблем касания относительно произвольно ориентированной кривой C и кривой C^*, ориентированной сначала в одном направлении, потом в другом.

Проблема равенства также распадается на две проблемы равенства относительно ориентированных кривых. Это и есть те задачи относительно ориентированных кривых, которые мы будем сейчас учиться разрешать.

12. Проблема касания двух ориентированных кривых. Предположим сначала, что $p \geqslant 2$. Исключим тот случай, когда хотя бы одна из точек A_0, A_0^* будет точкой перегиба. Выберем эти точки за начало криволинейных абсцисс. Если проблема возможна, то искомое перемещение совместит два

трехгранника Френе с вершинами A_0 и A_0^*; кроме того, элементы, порядок которых не выше p,

$$\rho, \ldots, \frac{d^{p-2}\rho}{ds^{p-2}},$$

и, если $p>2$,

$$\tau, \ldots, \frac{d^{p-3}\tau}{ds^{p-3}}$$

принимают одинаковые значения в этих двух точках. Обратно, допустим, что это перемещение выполнено и эти условия удовлетворены. Пусть A и A^* — две точки линии C и перемещенной линии C^*, криволинейные абсциссы которых равны s. В силу последних строк п. **10** при $s=0$ мы имеем

$$A = A^*, \quad \frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{d\mathbf{A}^*}{ds}, \ldots, \frac{d^p\mathbf{A}}{ds^p} = \frac{d^p\mathbf{A}^*}{ds^p}.$$

Формула Тэйлора позволяет вывести из этих соотношений, что при s, стремящемся к нулю, отношение $\dfrac{\overrightarrow{AA^*}}{s^{p+1}}$ остается ограниченным: две кривые действительно имеют порядок касания не меньше p.

Таким образом, чтобы проблема была возможна, необходимо и достаточно, чтобы каждый из элементов $\rho, \dfrac{d\rho}{ds}, \ldots,$ $\tau, \dfrac{d\tau}{ds}, \ldots,$ порядок которых не выше p, имел одно и то же значение в точке A_0 и в точке A_0^*. Если проблема возможна, то искомое перемещение будет единственным: это будет то самое перемещение, которое совмещает триэдры второго порядка точек A_0 и A_0^*.

Случай $p=1$. Проблема всегда возможна. Чтобы сформулировать решение, как в случае $p \geqslant 2$, введем следующее определение:

Правый триортогональный триэдр $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ будем называть триэдром первого порядка, присоединенным к точке A (ориентированной) кривой, если $\mathbf{I}_1$ лежит на (положительной) полукасательной в точке A.

Искомыми перемещениями будут такие перемещения, которые совмещают один из триэдров первого порядка, присоединенных к точке A_0^*, с наиболее общим триэдром первого порядка, присоединенным к точке A_0.

13. Проблема равенства. Если линии C и C^* аналитиче-

ские, то проблема равенства может быть разрешена с помощью проблемы касания: для того чтобы перемещение, которое совмещает точки A_0 и A_0^*, налагало кривую C на кривую C^*, необходимо и достаточно, чтобы оно осуществляло в этих точках касание, порядок которого больше любого целого числа p. Используем заключение предыдущего пункта, замечая, что ρ и τ — аналитические функции параметра s. Мы получим следующее условие возможности: кривизна ρ и кручение τ должны быть каждое одной и той же функцией криволинейной абсциссы s вдоль той и другой кривой.

Однако лучше подойти к этой задаче иначе. Будем предполагать только, что координаты текущей точки кривой есть функции одного параметра, допускающие производные четвертого порядка. Задача совмещения ориентированных кривых C и C^* эквивалентна задаче совмещения семейств трехгранников Френе, присоединенных к этим кривым.

Здесь приложимо основное условие равенства (п. **7**, стр. 93): оно сводит нашу задачу к отысканию всех соответствий между криволинейными абсциссами s и s^* этих двух кривых, которые бы удовлетворяли трем равенствам:

$$ds = ds^*, \quad \rho(s)\,ds = \rho^*(s^*)\,ds^*, \quad \tau(s)\,ds = \tau^*(s^*)\,ds^*.$$

Отыскание этих соответствий производится следующим образом.

Будем различать два случая:

1°. ρ *и* τ — *постоянные*; тогда необходимо, чтобы ρ^* и τ^* имели те же постоянные значения. Это условие достаточно; существует бесчисленное множество таких соотношений, именно: $s=s^*+C$, где C — произвольное постоянное. Каждая из двух кривых может скользить сама по себе при непрерывном перемещении.

2°. ρ *и* τ *не будут одновременно оба постоянными.* Предположим, например, что кривизна ρ не постоянна. Пусть $\frac{d\rho}{ds}=F(\rho)$, $\tau=\Phi(\rho)$; тогда необходимо, чтобы $\frac{d\rho^*}{ds^*}=F(\rho^*)$, $\tau^*=\Phi(\rho^*)$, где F и Φ — те же самые функции. Это условие достаточно: действительно, если установить между s и s^* соответствие, заданное посредством уравнения $\rho(s)=\rho^*(s^*)$, то получим $\tau(s)=\tau^*(s^*)$ и

$$ds = \frac{d\rho}{F(\rho)} = \frac{d\rho^*}{F(\rho^*)} = ds^*.$$

14. Используем, наконец, теорему структуры, которая сформулирована в п. 7. Отметим, что, каковы бы ни были функции $\rho(s)$ и $\tau(s)$, им соответствует семейство равных между собой трехгранников, зависящих от параметра s и удовлетворяющих уравнениям (6). Пусть C будет геометрическим местом вершин A этих трехгранников. Уравнения (6) показывают, что эти трехгранники будут трехгранниками Френе кривой C. Следовательно, имеет место

Теорема структуры. *Кривизна и кручение пространственной кривой — произвольные функции длины дуги.*

III. ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ, ОСНОВАННАЯ НА ТЕОРИИ СЕМЕЙСТВ ТРЕХГРАННИКОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПАРАМЕТРОВ

15. Введение. В предыдущем разделе проблемы касания и равенства не были исследованы; они были разрешены последовательностью соображений, несомненно остроумных, но именно поэтому не поддающихся обобщению. Мы вернемся к их исследованию более систематическим методом, который легко прилагается к многочисленным задачам этого рода, но более сложным, чем те, которые мы рассматривали.

Займемся сначала проблемой касания. Мы научимся решать ее для различных порядков, шаг за шагом, рекуррентно. Это решение сведется к последовательному определению элементов различных порядков, присоединенных к точке действительной кривой. С помощью этих элементов мы выскажем условия возможности и определим решения. Изложив полностью проблему касания, мы получим достаточно сведений для решения проблемы равенства.

16. Принцип рекуррентного решения проблемы касания. Элемент касания порядка p зависит, самое большее, от $2p+3$ параметров $[x, y, z, \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}]$. Следовательно, его можно рассматривать как точку в пространстве $2p+3$ измерений. Элементом касания порядка p кривой C соответствует, следовательно, кривая Γ этого пространства $2p+3$ измерений. Для того чтобы две кривые C и C^* трехмерного пространства имели касание, порядок которого не меньше p, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие кривые Γ и Γ^* имели общую точку; для того чтобы порядок этого касания превышал p, необходимо и достаточно, чтобы Γ и Γ^* касались в этой точке. Действительно, чтобы две эти кривые касались, необходимо и достаточно, чтобы в общей точке с абсциссой x остальные координаты $y, z, y', z', \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}$,

рассматриваемые как функции от x, так же как их первые производные, были равны, но это означает равенство соответствующих величин $y, z, y', z', \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}, y^{(p+1)}, z^{(p+1)}$ и $y^*, z^*, y^{*\prime}, z^{*\prime}, \ldots, y^{*(p)}, z^{*(p)}, y^{*(p+1)}, z^{*(p+1)}$; иначе говоря, это означает что две заданные кривые C и C^* имеют касание порядка $p+1$.

Мы можем теперь представить в другом виде условия касания двух кривых Г и Г*, выразив, что на этих двух кривых существует пара точек α, α^*, бесконечно близких к общей точке α_0, расстояние между которыми равно нулю, с точностью до бесконечно малых, порядок которых выше, чем расстояние между точками α_0 и α. Отсюда получаем следующее условие касания для кривых C.

Условие касания. *Чтобы две кривые C и C^*, имеющие в точке A_0 касание порядка p, имели бы в этой точке касания порядка $\geqslant p+1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали на линии C точка A и на линии C^* точка A^*, которые бесконечно близки к точке A_0 и в которых соотношения, выражающие, что линии C и C^* имеют в точках A и A^* касание порядка $\geqslant p$, выполняются с точностью до бесконечно малых порядка высшего, чем расстояние между точками A_0 и A.*

Проблему касания, таким образом, можно рассматривать с помощью рекуррентного процесса: чтобы разрешить проблему касания порядка $p+1$, надо найти среди решений проблемы порядка p такие решения, которые бы удовлетворяли только что высказанным условиям.

Ради краткости *предположим, что проблема касания порядка* 1 *уже разрешена*, и для этого определены касательная и трехгранники первого порядка (см. конец п. **12**). Предположим также, что определена ориентация и что мы будем рассматривать проблемы только для ориентированных кривых. Ориентированный элемент касания характеризуется непрерывным семейством присоединенных трехгранников первого порядка. Семейство вполне определено одним из этих трехгранников. Трехгранники первого порядка линии зависят от двух параметров: мы будем пользоваться параметром t, характеризующим положение на линии вершины трехгранника (мы будем называть его *главным параметром*), и *вторичным параметром* θ — углом, на который надо повернуть около положительной полукасательной трехгранник $(t, 0)$, чтобы получить трехгранник (t, θ). Достаточным условием касания первого порядка двух кривых будет совпадение некоторого трехгранника первого порядка первой кривой с

некоторым трехгранником первого порядка второй кривой.

17. Приложение условия касания к проблеме касания второго порядка. Пусть смещение, являющееся решением проблемы касания первого порядка, налагает произвольный трехгранник T_0^* первого порядка, присоединенный к точке A_0^*, на некоторый трехгранник T_0 первого порядка, присоединенный к точке A_0. Обозначим через (t_0^*, θ_0^*) и (t, θ) параметры этих трехгранников. Чтобы это смещение решало проблему касания второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы для заданного трехгранника первого порядка T^* кривой C^*, который бесконечно близок к T_0^* и вершиной которого служит данная точка A^*, бесконечно близкая к точке A_0^*, можно было найти трехгранник первого порядка T кривой C, на который рассматриваемое смещение наложит трехгранник T^* с точностью до бесконечно малых порядка высшего, чем расстояние $A_0^*A^*$. Аналитически это условие выражается следующим образом.

Пусть $\omega_i(t, \theta, dt, d\theta)$, $\omega_{ji}(t, \theta, dt, d\theta)$; $\omega_i^*(t^*, \theta^*, dt^*, d\theta^*)$, $\omega_{ji}^*(t^*, \theta^*, dt^*, d\theta^*)$ — компоненты инфинитезимального смещения трехгранников первого порядка линий C и C^*. Система

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i(t_0, \theta_0, dt, d\theta) = \omega_i^*(t_0^*, \theta_0^*, dt^*, d\theta^*) \quad (i = 1,2,3), \\ &\omega_{ji}(t_0, \theta_0, dt, d\theta) = \omega_{ji}^*(t_0^*, \theta_0^*, dt^*, d\theta^*) \quad (j < i), \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

где dt^* и $d\theta^*$ заданы, должна допускать решение относительно dt и $d\theta$.

Таким образом, разрешить проблему касания равносильно следующей проблеме: присоединить к значению θ_0^*, выбранному как нам удобно, все значения θ_0, для которых выполняется условие (c).

18. Уточнения о природе форм ω_i, ω_{ji}. Движение триэдра с параметрами (t, θ) вполне определено, если известны угол θ и движение трехгранника $(t, 0)$. Естественно, следовательно, искать выражения форм $\omega(t, \theta, dt, d\theta)$ как функции от форм $\omega(t, 0, dt, 0)$, угла θ и дифференциала $d\theta$. Это мы и будем делать. Заметим для этого, что, в силу формул (4) (см. стр. 90) и в силу определения трехгранников первого порядка, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1(t, \theta, dt, d\theta) = \mathbf{I}_1 \cdot d\mathbf{A}, \\ &\omega_2(t, \theta, dt, d\theta) = \omega_3(t, \theta, dt, d\theta) = 0, \\ &\omega_{ji}(t, \theta, dt, d\theta) = \mathbf{I}_i \cdot d\mathbf{I}_j. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Обозначим через $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ трехгранник, соответствующий значению $\theta = 0$. Тогда

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{J}_1, \ \mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_2 \cos\theta + \mathbf{J}_3 \sin\theta, \quad \mathbf{I}_3 = -\mathbf{J}_2 \sin\theta + \mathbf{J}_3 \cos\theta. \quad (8)$$

Мы имеем также формулы, аналогичные формулам (7):

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1(t, 0, dt, 0) = \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{A}, \\ &\omega_2(t, 0, dt, 0) = \omega_3(t, 0, dt, 0) = 0, \\ &\omega_{ji}(t, 0, dt, 0) = \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{J}_j. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Заменим в правых частях уравнений (7) величины $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_i$ и $d\mathbf{I}_j$ их выражениями, полученными из равенств (8); в полученных формулах учтем соотношения (8); тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1(t, \theta, dt, d\theta) = \omega_1(t, 0, dt, 0), \\ &\omega_2(t, \theta, dt, d\theta) = \omega_3(t, \theta, dt, d\theta) = 0, \\ &\omega_{12}(t, \theta, dt, d\theta) = \omega_{12}(t, 0, dt, 0)\cos\theta + \omega_{13}(t, 0, dt, 0)\sin\theta, \\ &\omega_{13}(t, \theta, dt, d\theta) = -\omega_{12}(t, 0, dt, 0)\sin\theta + \omega_{13}(t, 0, dt, 0)\cos\theta, \\ &\omega_{23}(t, \theta, dt, d\theta) = d\theta + \omega_{23}(t, 0, dt, 0). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Таким образом, дифференциал $d\theta$ не входит в формы ω_1, ω_2, ω_3, ω_{12}, ω_{13}; эти компоненты зависят только от выбора трехгранника (t, θ) и положения вершины трехгранника $(t+dt, \theta+d\theta)$. Условимся во всех аналогичных случаях называть такие компоненты *главными компонентами.*

Существуют некоторые трехгранники первого порядка, матрица главных компонент которых особенно проста. Форма ω_{13} обращается в нуль для двух значений θ. Рассмотрим * то из этих значений, которое дает положительное значение отношению $\frac{\omega_{12}(t, \theta, dt)}{\omega_1(t, \theta, dt)}$, не зависящему от dt. Будем называть соответствующий трехгранник «трехгранником второго порядка», или «трехгранником Френе», а значение ρ, соответствующее $\frac{\omega_{12}}{\omega_1}$, — «кривизной».

С другой стороны, заметим, что в силу (10) форма ω_1 одна и та же для всех трехгранников первого порядка. Она

---

* Мы предполагаем, что кривая ориентируема в направлении возрастания параметров. Мы исключаем из рассмотрения те точки, в которых обе формы $\omega_{12}(t, 0, dt, 0)$ и $\omega_{13}(t, 0, dt, 0)$ одновременно обращаются в нуль.

образует *дифференциальный инвариант первого порядка.* Его называют «дифференциалом длины дуги» и обозначают ds. С этого момента мы будем считать $t = s$.

Формулы Френе [(6), стр. 96] показывают, что эти определения хорошо согласуются с обычным определением длины дуги и трехгранника Френе, которые так назывались в предыдущем разделе.

19. Возвращение к проблеме касания второго порядка (п. 17). Рассмотрим снова условия (c). Выберем θ_0^* так, чтобы соответствующий трехгранник T_0^* был трехгранником второго порядка линии C^* в точке A_0^*. Условие (c) налагает на θ_0 требование, чтобы в точке A_0 мы имели $\omega_{13}=0$, $\frac{\omega_{12}}{\omega_1} > 0$. Трехгранник T_0, следовательно, необходимо должен быть трехгранником второго порядка кривой C в точке A_0. Система, которая фигурирует в условии (c), напишется теперь в виде:

$$ds = ds^*,$$

$$\rho\, ds = \rho^*\, ds^*,$$

$$d\theta + \omega_{23}(s, 0, ds, 0) = d\theta^* + \omega_{23}^*(s^*, 0, ds^*, 0).$$

Условие (c) эквивалентно условию $\rho=\rho^*$. Равенство двух кривизн будет, следовательно, единственным условием возможности проблемы. Если это условие удовлетворено, то проблема допускает единственное решение: это перемещение, которое налагает трехгранник Френе T_0^* на трехгранник Френе T_0.

20. Проблема касания третьего порядка. Приложим условие касания (п. **16**); это очень просто сделать, потому что проблема второго порядка допускает самое большее одно решение. Этим решением, если оно существует, будет перемещение, которое налагает трехгранники Френе точек A_0 и A_0^*. Предположим, что это перемещение выполнено. Чтобы оно осуществило касание порядка $\geqslant 3$, должны существовать точка A линии C и точка A^* линии C^*, бесконечно близкие к точке A_0, такие, что трехгранники Френе и кривизны в этих точках совпадают с точностью до бесконечно малых порядка высшего, чем A_0A. Это условие эквивалентно следующему условию, в котором формы ω и ω^* представляют компоненты инфинитезимального смещения трехгранников Френе двух кривых: система

$$\rho + \frac{d\rho}{ds}\, ds = \rho^* + \frac{d\rho^*}{ds^*}\, ds^*,$$

$$\omega_i(s,ds) = \omega_i^*(s^*, ds^*),$$

$$\omega_{ji}(s,ds) = \omega_{ji}(s^*, ds^*)$$

должна допускать решение, для которого ни ds, ни ds^* не равны нулю.

Условиями возможности проблемы будут, следовательно, условия

$$\rho = \rho^*, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho^*}{ds^*}, \quad \tau = \tau^*.$$

Если эти условия удовлетворены, то решение единственное.

Отсюда легко последовательно вывести решения *проблем касания порядков* 4, ..., p (см. п. **12**, стр. 97—98).

21. Проблема равенства. Семейство трехгранников второго порядка, присоединенных к ориентированной кривой C, — это такое семейство, которое при смещении линии C будет преобразовано тем же смещением. Напомним причины этого: семейство трехгранников первого порядка обладает этим свойством; более того, смещение не меняет относительных компонент инфинитезимального смещения трехгранника; но трехгранники второго порядка были определены как такие трехгранники первого порядка, (главные) компоненты которых ω удовлетворяют некоторым соотношениям.

С другой стороны, семейство трехгранников второго порядка зависит только от одного параметра.

В силу этого проблема равенства двух ориентированных кривых сводится к проблеме равенства двух семейств трехгранников, каждое из которых зависит от одного параметра, а эта последняя проблема легко разрешается с помощью основного условия равенства п. **7** (стр. 93) (см. п. **13**, стр. 99).

Точно так же *теорема структуры* п. **14** (стр. 100) непосредственно следует из *теоремы структуры* п. **7** (стр. 93).

IV. МЕТОД ПРИВЕДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

21 *bis*. Можно получить уравнения Френе другим способом — *методом приведенных уравнений.*

Он состоит в том, что если задана ориентируемая пространственная кривая C, то к каждой из ее точек A присоединяется триортогональный трехгранник так, чтобы первые коэффициенты уравнений кривой (которую мы будем предполагать аналитической), развернутых в окрестности точки A, были, насколько это возможно, простыми. Здесь, естествен-

но, ось x будет положительной полукасательной, ось y — главной нормалью и ось z — бинормалью.

Уравнения кривой будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{6} c x^3 + \ldots, \\ z &= \frac{1}{6} b x^3 + \ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Абсцисса x точки A', бесконечно близкой к точке A, будет бесконечно малой величиной, которая имеет внутреннее значение и является элементарной дугой ds. Коэффициенты a и b — инварианты, присоединенные к точке A, первый, очевидно, второго порядка, второй — третьего порядка.

Формулы Френе дают компоненты ω_i, ω_{ij} инфинитезимального смещения трехгранника, присоединенного к подвижной точке A линии [формулы (4), стр. 90]:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \qquad\qquad \omega_1 \mathbf{I}_1 + \omega_2 \mathbf{I}_2 + \omega_3 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad \omega_{12} \mathbf{I}_2 + \omega_{13} \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_2 &= -\omega_{12} \mathbf{I}_1 \qquad\qquad\quad + \omega_{23} \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= -\omega_{13} \mathbf{I}_1 - \omega_{23} \mathbf{I}_2. \end{aligned}$$

Возьмем теперь на кривой неподвижную точку B и пусть x, y, z — ее координаты относительно трехгранника T с началом в A; они удовлетворяют уравнениям (11), где коэффициенты $a, b, \ldots$ зависят от A, например будут функциями криволинейной абсциссы s точки A. Если выразить, что точка с относительными координатами x, y, z остается неподвижной, когда трехгранник T меняется, получим соотношения:

$$\begin{aligned} dx + \omega_1 - y\omega_{12} - z\omega_{13} &= 0, \\ dy + \omega_2 + x\omega_{12} - z\omega_{23} &= 0, \\ dz + \omega_3 + x\omega_{13} + y\omega_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Выражая из (11) dy и dz:

$$dy = (ax + \ldots)\, dx + \frac{1}{2} da\, x^2 + \ldots,$$

$$dz = \left(\frac{1}{2} b x^2 + \ldots\right) dx + \frac{1}{6} db\, x^3 + \ldots,$$

получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&\omega_2 + x\omega_{12} - \left(\frac{1}{6} bx^3 + \ldots\right)\omega_{23} = \\
&= (ax + \ldots)\left[\omega_1 - \left(\frac{1}{6} ax^2 + \ldots\right)\omega_{12} - \right. \\
&\left. - \left(\frac{1}{6} bx^3 + \ldots\right)\omega_{13}\right] - \frac{1}{2} da\, x^2 + \ldots, \\
&\omega_3 + x\omega_{13} + \left(\frac{1}{2} ax^2 + \ldots\right)\omega_{23} = \\
&= \left(\frac{1}{2} bx^2 + \ldots\right)\left[\omega_1 - \left(\frac{1}{6} ax^2 + \ldots\right)\omega_{12} - \right. \\
&\left. - \left(\frac{1}{6} bx^3 + \ldots\right)\omega_{13}\right] - \frac{1}{6} db\, x^3 + \ldots .
\end{aligned}
\right\} \qquad (12)
$$

Эти соотношения должны иметь место, какова бы ни была точка A и *также какова бы ни была фиксированная точка* B; следовательно, это — тождества относительно x. Сравнивая члены, не зависящие от x, и члены, содержащие x, получим сначала

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0,$$

затем

$$\omega_{12} = a\omega_1, \quad \omega_{13} = 0;$$

члены с x^2 во втором уравнении дают далее

$$a\omega_{23} = b\omega_1.$$

Бесконечно малая величина ω_1 будет, очевидно, равна ds, поскольку ω_1 есть абсцисса точки $A + dA$; поэтому получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}}{ds} &= \mathbf{I}_1, \\
\frac{d\mathbf{I}_1}{ds} &= a\,\mathbf{I}_2, \\
\frac{d\mathbf{I}_2}{ds} &= -a\,\mathbf{I}_1 + \frac{b}{a}\mathbf{I}_3, \\
\frac{d\mathbf{I}_3}{ds} &= -\frac{b}{a}\mathbf{I}_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, можно сделать два заключения:

1°. Знание приведенной формы уравнений кривой позволяет вновь придти к формулам Френе.

2°. Имеем

$$a=\rho, \quad \frac{b}{a}=\tau, \text{ или } b=\rho\tau.$$

Продолжая далее отождествление уравнений (12), подсчитаем последовательно коэффициенты правых частей уравнений (11) как функции от ρ, τ, $\frac{d\rho}{ds}, \frac{d\tau}{ds}$ и т. д., что доказывает снова, что пространственная кривая вполне определена, с точностью до перемещения, если ρ и τ заданы как функции от s.

Сравнение членов, содержащих x^2, в первом уравнении (12) дает, например,

$$c=\frac{da}{ds}=\frac{d\rho}{ds}.$$

Глава II

ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ КРИВЫХ

22. Введение. Теория, изложенная в предыдущей главе, легко переносится на случай произвольной комплексной* кривой, кроме минимальной кривой.

Действительно, пусть кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

минимальная, т. е. такая, что ее касательные изотропны:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \tag{1}$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0. \tag{2}$$

Эти соотношения показывают, что нормальная и соприкасающаяся плоскости такой кривой совпадают. С другой стороны, касательная не может нести вектор I_1, длина которого равна 1. Следовательно, определение трехгранника Френе теряет смысл.

Задача этой главы — разрешить проблемы касания и равенства для двух минимальных кривых**. Мы полностью используем последний раздел предыдущей главы. Но пользование триортогональными трехгранниками мало удобно. Поэтому мы посвятим первый раздел этой главы свойствам

---

* Всякий раз, когда мы изучаем задачу, где встречаются комплексные величины, мы будем предполагать, что все встречающиеся функции аналитические.

** Теория минимальных кривых основана Софусом Ли ([4], стр. 694—709), но понятие *псевдодуги* принадлежит Е. Вессио (E. Vessio), см. *Comptes rendus*, т. 140, 1905, стр. 1381.

трехгранников другого вида. Затем во втором разделе мы присоединим к произвольной минимальной кривой различные семейства таких трехгранников, которые мы назовем трехгранниками первого порядка, второго порядка и т. д. В третьем разделе мы разрешим проблемы равенства и касания, используя это присоединение; названия, которые мы дадим трехгранникам первого порядка и т. д., будут тогда оправданы. Мы закончим эту главу некоторыми дополнениями, несколькими формулами и геометрическими интерпретациями.

I. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ТРИЭДРЫ

23. Определение. Пусть задан правый триортогональный трехгранник *Oxyz*; рассмотрим триэдр, образованный точкой O и тремя векторами $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{I}''$, которые имеют точку O в качестве своего начала и компоненты которых равны соответственно

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}, & \frac{i}{2}, & 0, \\ 0, & 0, & 1. \\ 1, & -i, & 0. \end{array}$$

Никакое смещение не оставляет неподвижным этот триэдр, ибо такое смещение оставило бы неподвижным триэдр *Oxyz*. Этот триэдр, так же как и все равные ему триэдры, будем называть *правым циклическим триэдром*; триэдры, симметричные правым циклическим триэдрам, будем называть *левыми циклическими триэдрами.* Существует одно и только одно перемещение, которое преобразует один данный циклический триэдр в другой данный циклический триэдр той же ориентации. Никакое перемещение не переводит правый циклический триэдр в левый циклический триэдр; в противном случае перемещение могло бы преобразовать триэдр *Oxyz* в симметричный ему триэдр. Правые и левые циклические триэдры образуют два непрерывных семейства без общих элементов.

Если $A\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ — циклический триэдр, то матрица величин

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1^2 & \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2^2 & \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3\mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_3\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если, кроме того, циклический триэдр — правый, то имеем:

$$[\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2] = i\mathbf{I}_1, \ [\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3] = i\mathbf{I}_3, \ [\mathbf{I}_3\mathbf{I}_1] = i\mathbf{I}_2 \tag{4}$$

и

$$(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3) = i. \tag{5}$$

Соотношения (3), (4) и (5) не будут независимыми. Мы не нуждаемся в уточнении этого положения, а докажем только следующую теорему:

Всякий триэдр $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$, *удовлетворяющий соотношениям* (3) *и* (5), *будет правым циклическим триэдром.*

Действительно, одним смещением мы приведем к совпадению плоскости $\mathbf{I}_1O\mathbf{I}_3$ и xOy так, что $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}$ будут располагаться на одной и той же изотропной прямой; $\mathbf{I}_3$ и $\mathbf{I}''$ будут также располагаться на одной изотропной прямой. Вращение около оси Oz позволит осуществить равенство $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$. Но соотношение

$$\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}''$$

дает

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}''.$$

Единичные векторы $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{I}'$, перпендикулярные к $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{I}_3$, равны или противоположны. Соотношение (5) доказывает, что не может быть $\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}'$, следовательно, обязательно

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}'.$$

Теорема тем самым доказана.

24. Компоненты инфинитезимального смещения. Циклический триэдр зависит, как и наиболее общее смещение, от *шести* параметров. Мы не будем уточнять их выбор и будем их изменять. Пусть M — фиксированная относительно триэдра точка. Имеем

$$\overrightarrow{AM} = x\mathbf{I}_1 + y\mathbf{I}_2 + z\mathbf{I}_3,$$

где x, y, z — константы. Отсюда

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{A} + xd\mathbf{I}_1 + yd\mathbf{I}_2 + zd\mathbf{I}_3.$$

Чтобы знать инфинитезимальное смещение триэдра, достаточно, следовательно, знать *двенадцать* форм Пфаффа ω, которые определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_1\mathbf{I}_1 + \omega_2\mathbf{I}_2 + \omega_3\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \omega_{11}\mathbf{I}_1 + \omega_{12}\mathbf{I}_2 + \omega_{13}\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_2 &= \omega_{21}\mathbf{I}_1 + \omega_{22}\mathbf{I}_2 + \omega_{23}\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= \omega_{31}\mathbf{I}_1 + \omega_{32}\mathbf{I}_2 + \omega_{33}\mathbf{I}_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Не более шести из этих форм будут линейно независимыми формами относительно шести дифференциалов параметров.

Это легко уточнить. Величины $\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{I}_j$ — все константы, отсюда

$$\mathbf{I}_i \, d\mathbf{I}_j + \mathbf{I}_j \, d\mathbf{I}_i = 0.$$

Заменим в этих соотношениях дифференциалы выражениями (6) и примем во внимание соотношения (3); тогда получим:

$$\omega_{13} = 0, \ \omega_{22} = 0, \ \omega_{31} = 0, \ \omega_{12} + \omega_{23} = 0, \quad \omega_{11} + \omega_{33} = 0,$$

$$\omega_{21} + \omega_{32} = 0.$$

Следовательно, шести величин

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \omega_{11}, \ \omega_{12}, \ \omega_{21}$$

достаточно, чтобы определить инфинитезимальное смещение трехгранника. Это те компоненты, которые мы будем называть относительными компонентами этого смещения. В дальнейшем будем записывать систему (6) в виде:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_1\mathbf{I}_1 + \omega_2\mathbf{I}_2 + \omega_3\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \omega_{11}\mathbf{I}_1 + \omega_{12}\mathbf{I}_2, \\ d\mathbf{I}_2 &= \omega_{21}\mathbf{I}_1 \qquad\quad - \omega_{12}\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= \qquad - \omega_{21}\mathbf{I}_2 - \omega_{11}\mathbf{I}_3; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \mathbf{I}_3 \, d\mathbf{A}, & \omega_{11} &= \mathbf{I}_3 \, d\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_1 \, d\mathbf{I}_3, \\ \omega_2 &= \mathbf{I}_2 \, d\mathbf{A}, & \omega_{12} &= \mathbf{I}_2 \, d\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_1 \, d\mathbf{I}_2, \\ \omega_3 &= \mathbf{I}_1 \, d\mathbf{A}, & \omega_{21} &= \mathbf{I}_3 \, d\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_2 \, d\mathbf{I}_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

25. Свойства относительных компонент ω. Мы говорим, что *эти шесть компонент — независимые формы от шести дифференциалов параметров.* В противном случае дифференциальная система

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{21} = 0$$

допускала бы другие решения, кроме тех, которые приводят все параметры к константам; существовали бы подвижные триэдры, компоненты инфинитезимального смещения которых равнялись бы нулю и каждая точка, следовательно, была бы неподвижна, что, очевидно, абсурдно (ср. п. 8, стр. 94—95).

Поставим теперь следующую задачу интегрирования. Зададимся произвольно формами

$$\left.\begin{array}{lll} \omega_1 = \xi_1(t)\,dt, & \omega_2 = \xi_2(t)\,dt, & \omega_3 = \xi_3(t)\,dt, \\ \omega_{11} = \xi_{11}(t)\,dt, & \omega_{12} = \xi_{12}(t)\,dt, & \omega_{21} = \xi_{21}(t)\,dt. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Будем искать все семейства циклических триэдров, зависящих от параметра t и допускающих эти формы компонентами своих инфинитезимальных смещений (ср. п. 5, стр. 91).

Пусть $u_1, \ldots, u_6$ — параметры наиболее общего циклического триэдра. Поскольку компоненты ω образуют шесть линейно независимых форм относительно du_q, уравнения (9) эквивалентны системе шести дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_q}{dt} = f_q(u_1, \ldots, u_6, t).$$

Следовательно, существует одно и только одно семейство рассматриваемого вида, триэдр которого, соответствующий параметру $t=0$, будет произвольно заданным циклическим триэдром.

Отсюда следует, в частности, теорема структуры: *Компоненты инфинитезимального смещения подвижного циклического триэдра, зависящего от одного параметра, не подчинены никакому условию структуры* [ср. п. 7, стр. 93]

26. Условие равенства. Если все трехгранники семейства подвергнуть одному и тому же смещению, относительные компоненты ω их инфинитезимальных смещений останутся теми же самыми, ибо они определяют *относительное* положение двух бесконечно близких трехгранников, т. е. имеют внутреннее значение.

В частности, всякое перемещение преобразует одно решение задачи интегрирования, изложенной в п. **25**, в другое решение той же задачи.

Все решения этой задачи будут равны между собой. Следовательно, для $\rho=1$ доказана следующая теорема:

Основное условие равенств. *Пусть между двумя семействами триэдров T и T^*, каждое из которых зависит от ρ параметров, установлено взаимно однозначное соответствие. Чтобы одно и то же перемещение могло совместить все соответствующие триэдры, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемое соответствие делало компоненты ω инфинитезимального смещения триэдра T равными компонентам ω^* инфинитезимального смещения соответствующего триэдра T^** (ср. п. **7**, стр. 93).

Более того, необходимость этого условия установлена для любого значения ρ $(\leqslant 6)$.

Чтобы установить достаточность этого условия, т. е. полностью доказать теорему, мы будем поступать, как в п. **6** (стр. 92—93). Предположим, что условие удовлетворено. Теорема справедлива при $\rho=1$: всякое зависящее от одного параметра семейство триэдров, взятое из семейства T, конгруэнтно соответствующему семейству триэдров семейства T^*. Отсюда следует равенство самих семейств T и T^*, ч.т.д.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К МИНИМАЛЬНОЙ КРИВОЙ

27. Определение триэдров первого порядка. Так мы будем называть правые циклические триэдры, вершина которых принадлежит заданной минимальной кривой и первый вектор $\mathbf{I}_1$ которых касается этой кривой в точке A. Второй вектор $\mathbf{I}_2$ принадлежит, следовательно, нормальной и соприкасающейся плоскостям [см. введение к гл. II, п. **22**].

Соотношения, характеризующие триэдр первого порядка. Семейства триэдров первого порядка выделяются среди семейств правых циклических триэдров, вершины которых A лежат на кривой, тем, что $d\mathbf{A}$ параллельно $\mathbf{I}_1$.

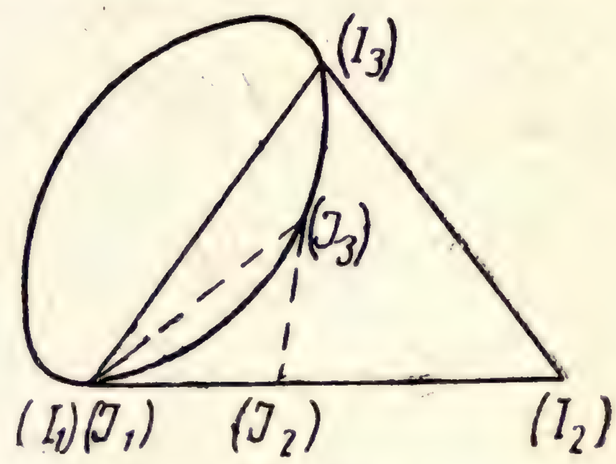
В силу формул (7), этот факт можно записать в виде двух уравнений:

$$\omega_2=0, \qquad \omega_3=0. \tag{10}$$

Сравнение двух триэдров первого порядка. Пусть $A\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$— некоторый триэдр первого порядка. Будем искать

наиболее общий триэдр первого порядка $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, который имеет ту же вершину. На фиг. 2 изображена схема несобственной плоскости, на которой изображены сферический круг (*l'ombilicale*) и несобственные точки $(\mathbf{I}_1)$, $(\mathbf{J}_1)$, ..., прямых, на которых расположены векторы $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{J}_1, \ldots$. По определению триэдров первого порядка имеем:

$$\mathbf{I}_1 = \alpha\mathbf{J}_1,$$
$$\mathbf{I}_2 = \beta\mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1,$$
$$\mathbf{I}_3 = \gamma[\mathbf{J}_3 + \mu\mathbf{J}_2 + \rho\mathbf{J}_1].$$



Фиг. 2

Чтобы выразить, что триэдр $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ — правый циклический триэдр, используем уравнения (3) и (5) (теорема п. **23**, стр. 110—111). Тогда получим

$$\beta^2 = 1,\ \alpha\gamma = 1,\ \beta\mu + \lambda = 0,\ \mu^2 + 2\rho = 0,\ \alpha\beta\gamma = 1,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{I}_1 = \alpha\mathbf{J}_1,\\
&\mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1,\\
&\mathbf{I}_3 = \frac{1}{\alpha}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right].
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Семейство триэдров первого порядка зависит, следовательно, от одного *главного параметра t*, который характеризует положение точки A на кривой, и, кроме того, от *двух вторичных параметров* $\alpha \neq 0$ и λ. Семейство триэдров первого порядка непрерывно.

Сравнение компонент инфинитезимального смещения двух триэдров первого порядка. Предположим, что два триэдра $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ и $A\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$ изменяются, сохраняя одно и то же начало. Пусть ω — компоненты инфинитезимального смещения первого триэдра, $\overline{\omega}$ — второго. Поставим себе задачей подсчитать компоненты ω как функции от компонент $\overline{\omega}$, λ, α, $d\lambda$, $d\alpha$. Для этой цели мы используем формулы (3), (7), (8) и (11):

$$\omega_1 = \mathbf{I}_3\,d\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right]d\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha}\overline{\omega}_1,$$

$$\omega_{11} = \mathbf{I}_3\, d\mathbf{I}_1 = \frac{1}{\alpha}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right][\alpha\, d\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1\, d\alpha] =$$

$$= \bar{\omega}_{11} - \lambda\bar{\omega}_{12} + \frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$\omega_{12} = \mathbf{I}_2\, d\mathbf{I}_1 = [\mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1][\alpha\, d\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1\, d\alpha] = \alpha\bar{\omega}_{12},$$

$$\omega_{21} = \mathbf{I}_3\, d\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\alpha}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right][d\mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1\, d\lambda] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\bar{\omega}_{21} - \frac{\lambda^2}{\alpha}\bar{\omega}_{12} + \lambda\bar{\omega}_{11} + d\lambda\right).$$

Окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \frac{1}{\alpha}\bar{\omega}_1, \; \omega_{11} = \bar{\omega}_{11} - \lambda\bar{\omega}_{12} + \frac{d\alpha}{\alpha}, \\ &\omega_{12} = \alpha\bar{\omega}_{12}, \;\; \omega_{21} = \frac{1}{\alpha}\left(\bar{\omega}_{21} - \frac{\lambda^2}{2}\bar{\omega}_{12} + \lambda\bar{\omega}_{11} + d\lambda\right). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Обратим внимание на те линейные комбинации компонент ω, в которых не встречаются дифференциалы $d\alpha$, $d\lambda$ вторичных параметров: это линейные комбинации форм ω_1, ω_2, ω_{31}, ω_{12}; их значения зависят только от выбора триэдра $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ и от инфинитезимального смещения его вершины. Мы дадим название *главных компонент первого порядка формам*

$$\boxed{\omega_1, \quad \omega_2\,(=0), \quad \omega_3\,(=0), \quad \omega_{12}}$$

Замечание. Можно предвидеть, что эти формы будут главными компонентами: их линейные комбинации — линейные комбинации форм ω, которые обращаются в нуль вместе с дифференциалом dt. Но предположение $dt=0$ имеет следствием равенство $d\mathbf{A}=0$ и параллельность вектора $d\mathbf{I}_1$ вектору $\mathbf{I}_1$; отсюда $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$, $\omega_{12}=0$. Формы ω_1, ω_2, ω_3, ω_{12} являются, следовательно, главными компонентами. Других главных компонент нет, ибо число главных компонент равно числу компонент ω минус число вторичных параметров: $6-2=4$.

28. Триэдры второго порядка. В силу формул (12), всякая точка A кривой обладает такими триэдрами первого порядка, для которых

$$\omega_1 = \omega_{12}. \qquad (13)$$

Эти триэдры мы назовем триэдрами второго порядка.

Это определение теряет смысл, когда $\omega_{12}=0$; тогда компонента ω_{12} равна нулю для всех триэдров первого порядка. В этом случае становится невозможным отличать друг от друга триэдры первого порядка с помощью соотношений на главные компоненты; это исключение мы рассмотрим более детально в п. **30** (стр. 119—120).

Сравнение двух триэдров второго порядка. Обозначим теперь через $A\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$ некоторый триэдр второго порядка и через $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ — наиболее общий триэдр второго порядка. Формулы (12) показывают, что в уравнениях (11) параметр λ остается произвольным, но

$$\alpha = \pm 1. \tag{14}$$

Семейство триэдров второго порядка распадается, следовательно, на два непрерывных непересекающихся подсемейства.

Произвольно мы выбираем одно из этих двух подсемейств. Эта операция называется *ориентацией* кривой, по аналогии с действительными кривыми: семейство триэдров первого порядка, присоединенных к действительной неориентированной кривой, несвязно и состоит из двух непрерывных подсемейств; выбрать одно из этих подсемейств — значит ориентировать кривую. Точно так же мы будем называть триэдрами второго порядка, присоединенными к нашей ориентированной минимальной кривой, только элементы подсемейства, которое мы выделим.

В силу (11) и (12), если $A\,\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ и $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ — два триэдра второго порядка ориентированной кривой, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{J}_1, \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1, \\ \mathbf{I}_3 &= \mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \overline{\omega}_1, \\ \omega_{11} &= \overline{\omega}_{11} - \lambda\overline{\omega}_1, \\ \omega_{21} &= \overline{\omega}_{21} - \frac{\lambda^2}{2}\overline{\omega}_1 + \lambda\overline{\omega}_{11} + d\lambda; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

здесь λ произвольно.

Формулы (11) и (12) показывают также, что всякому триэдру второго порядка $A\,\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ ориентированной кри-

вой соответствует триэдр второго порядка $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ кривой, ориентированной в обратном направлении, так что имеем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= -\mathbf{J}_1, \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{J}_2, \\ \mathbf{I}_3 &= -\mathbf{J}_3; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= -\bar{\omega}_1, \\ \omega_{11} &= \bar{\omega}_{11}, \\ \omega_{21} &= -\bar{\omega}_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В силу (16), компонента ω_1 — одна и та же для всех триэдров второго порядка ориентированной кривой; это форма Пфаффа, зависящая только от главного параметра; она образует *дифференциальный инвариант второго порядка.* Мы назовем ее дифференциалом *псевдодуги* и будем обозначать $d\sigma$ (ср. конец п. **18**, стр. 104). Первая формула (18) показывает, что $d\sigma$ преобразуется в $-d\sigma$, когда меняется ориентация кривой.

Линейные комбинации компонент репера второго порядка, в которые не входит дифференциал $d\lambda$, будут линейными комбинациями следующих *главных компонент:*

Порядок 1	Порядок 2
$\omega_1,\ \omega_2\,(=0),\quad \omega_3\,(=0),\quad \omega_{12}\,(=\omega_1)$	ω_{11}

Это можно было предвидеть: реперы второго порядка зависят от меньшего *на единицу* числа вторичных параметров, чем реперы первого порядка. Линейные комбинации форм ω, в которые не входят дифференциалы вторичных параметров, должны быть линейными комбинациями *на единицу* большего числа главных компонент; но из предположения $dt=0$, в силу (15), следует $d\mathbf{I}_1=0$ и, следовательно, в силу (7), $\omega_{11}=0$. Главной компонентой второго порядка будет, следовательно, форма ω_{11}.

29. Триэдры третьего порядка. Мы будем выделять из семейства триэдров второго порядка специальные триэдры, которые будем называть триэдрами третьего порядка; выде-

лять их мы будем, налагая условие на главную компоненту третьего порядка; этим условием будет

$$\omega_{11} = 0. \tag{19}$$

Всякая ориентированная кривая в каждой своей точке имеет один-единственный триэдр третьего порядка $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$. В силу (18), симметричный ему относительно $\mathbf{I}_2$ триэдр $A\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$, который определяется равенствами (17), будет триэдром третьего порядка ориентированной в обратном направлении кривой.

Будем полагать $\omega_{21}=kd\sigma$; величина k будет называться *кривизной*, или инвариантом* четвертого порядка.

В силу (18), величина кривизны не зависит от ориентации. Мы получаем формулы, аналогичные *формулам Френе* (п. **10**, стр. 96):

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\sigma\,\mathbf{I}_1, & d\mathbf{I}_2 &= d\sigma(k\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2), \\ d\mathbf{I}_1 &= d\sigma\,\mathbf{I}_2, & d\mathbf{I}_3 &= -k\,d\sigma\,\mathbf{I}_2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Теорема структуры. Пусть произвольно задана функция $k(\sigma)$. В силу теоремы структуры п. **25** (стр. 113), существует циклический триэдр $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, зависящий от параметра σ, такой, что уравнения (20) будут удовлетворены. Первое из этих уравнений показывает, что вершина A описывает минимальную кривую C. Кроме того, $\omega_2=\omega_3=0$; следовательно, этот триэдр будет триэдром первого порядка линии C. Далее имеем $\omega_1=\omega_{12}$; значит, это триэдр второго порядка. Наконец, $\omega_{11}=0$; значит, это триэдр третьего порядка для надлежащим образом ориентированной кривой C. Кривизна C в точке с псевдодугой σ равна $k(\sigma)$. Отсюда вытекает теорема структуры: *вдоль минимальной кривой кривизна есть произвольная функция псевдодуги.*

30. Особый случай. Предыдущие определения теряют силу для *кривых, компоненты* ω_{12} *триэдров первого порядка которых постоянно равны нулю***.

Для этих триэдров существует тогда только одна главная компонента ω_1; способ определения триэдров второго порядка посредством соотношений на главные компоненты триэдров первого порядка будет непригоден.

---

* Название «инвариант» означает, что k не изменяется при перемещении кривой.

** Точно так же семейство действительных кривых содержит особую категорию прямых линий, к которым нельзя присоединить трехгранника Френе.

Рассмотрим две такие кривые C и C^*; пусть T — семейство триэдров первого порядка линии C, T^* — линии C^*. Пусть существует однопараметрическое семейство триэдров в семействе T; тогда этим подвижным триэдрам T можно поставить в соответствие подвижные триэдры T^*, инфинитезимальные смещения которых имеют те же компоненты, таким образом, что каждому произвольному триэдру T_0 соответствует произвольно выбранный триэдр T_0^*: для этого достаточно проинтегрировать уравнения

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_{11} = \omega_{11}^*, \quad \omega_{21} = \omega_{21}^*,$$

которые образуют систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями, начальные значения которых заданы. Следовательно, смещение, которое налагает произвольный триэдр первого порядка T_0 кривой C на триэдр T_0^* кривой C^*, будет налагать эти две кривые (см. *основное условие равенства*, п. **26**, стр. 114).

В частности, семейство перемещений, зависящее от трех параметров, позволяет преобразовать линию C саму в себя: всякое смещение, преобразующее друг в друга два триэдра первого порядка линии C, сохраняет эту линию неподвижной. Это показывает, что ни один триэдр первого порядка не обладает никаким внутренним специальным свойством: этим объясняется неудача процесса, посредством которого мы определяли триэдры второго порядка.

Впрочем, рассматриваемые кривые очень просты: соотношение $\omega_{12}=0$ влечет $d\mathbf{I}_1 = \omega_{11}\mathbf{I}_1$ а это означает, что касательная остается вдоль кривой параллельной фиксированному направлению; наши кривые являются изотропными кривыми*.

III. ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА И КАСАНИЯ

31. Проблема равенства. Определения, которые мы дали в предыдущем разделе, таковы, что, если мы подвергнем нашу минимальную кривую произвольному перемещению, элементы k и $d\sigma$ не меняются и триэдры первого, второго и третьего порядков будут преобразовываться тем же преобра-

* Семейство перемещений, которые преобразуют неизотропную прямую саму в себя, зависит от двух параметров, несвязно и состоит из двух непрерывных подсемейств. Тем не менее, как мы это увидим, семейство перемещений, преобразующих изотропную прямую в себя, зависит от трех параметров, и будет непрерывным.

зованием: это вытекает из внутреннего значения компонент ω (ср. п. **26**, стр. 113—114).

В частности, проблема *определения тех перемещений, которые налагают две заданные ориентированные минимальные кривые C и C^**, эквивалентна задаче отыскания перемещений, которые налагают триэдры третьего порядка кривых C и C^*. Основное условие равенства (п. **26**, стр. 114) сводит эту задачу к отысканию всех взаимно однозначных соответствий, установленных между линиями C и C^*, которые удовлетворяют двум уравнениям:

$$k(\sigma) = k^*(\sigma^*), \quad d\sigma = d\sigma^*. \tag{21}$$

Если проблема равенства поставлена для двух неориентированных кривых C и C^*, то надо построить кроме предыдущих соответствий еще и такие, которые удовлетворяют уравнениям:

$$k(\sigma) = k^*(\sigma^*), \quad d\sigma = -d\sigma^*. \tag{22}$$

Каждое из полученных соответствий дает одно из перемещений, которое совместит C и C^*.

Рассмотрим *специальный случай,* когда одна из кривизн будет постоянной. Другая кривизна должна иметь ту же самую постоянную величину, иначе проблема наложения кривых будет невозможна. Поскольку каждое из соответствий (21) и (22) зависит от одного произвольного параметра, можно наложить кривую C на C^* так, чтобы совпали две произвольно выбранные их точки и чтобы ориентации этих кривых либо совпадали, либо были противоположны. В частности, кривая C может скользить сама по себе (как винтовая линия); если C_1 будет кривой, получаемой из C переменой ориентации, то перемещения позволяют совместить C и C_1.

32. Проблема касания первого порядка. Эта проблема решается непосредственно. Пусть даны две минимальные кривые C и C^* и две их точки A_0 и A_0^*; смещения, которые налагают A_0^* на A_0, осуществляя касание порядка $\geqslant 1$, приводят произвольно выбранный триэдр T_0^* первого порядка точки A_0^* к совпадению с различными триэдрами первого порядка T_0, присоединенными к точке A_0. Эти перемещения зависят, следовательно, от двух параметров.

Отметим, с другой стороны, что элемент касания первого порядка определяется заданием семейства присоединенных триэдров первого порядка, *и наоборот*.

Мы разрешим *проблемы касания порядка выше первого*, прилагая условие касания, высказанное в п. **16** (стр. 101); это условие имеет силу при условии, что мы будем определять расстояние двух точек не промежутком между ними, а, например, наибольшим модулем разностей их координат.

33. Проблема касания второго порядка. Пусть задано перемещение, разрешающее проблему касания первого порядка: оно совмещает произвольный триэдр первого порядка T_0^*, присоединенный к точке A_0^*, с триэдром T_0 первого порядка, присоединенным к точке A_0. Чтобы это перемещение осуществило касание порядка $\geqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти инфинитезимальное смещение триэдра первого порядка T_0 и инфинитезимальное смещение триэдра T_0^*, которые равны и перемещают вершины этих триэдров. Это условие выражается системой линейных уравнений, которые наложены на дифференциалы параметров:

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_{11} = \omega_{11}^*, \quad \omega_{12} = \omega_{12}^*, \quad \omega_{21} = \omega_{21}^*; \tag{23}$$

эта система должна допускать решение, не обращающее в нуль дифференциалы главных параметров.

Предположим, что мы выбрали за T_0^* триэдр второго порядка: $\omega_1^* = \omega_{12}^*$; мы должны иметь тогда $\omega_1 = \omega_{12}$, т. е. T_0 должен быть триэдром второго порядка. Если это так, то искомое решение системы (23) несомненно существует, ибо ω_1, ω_{11} и ω_{21} — линейно независимые формы дифференциалов одного главного и двух вторичных параметров (ср. п. **27**, стр. 115).

Таким образом, решениями проблемы касания второго порядка будут те перемещения, которые совмещают триэдр второго порядка, присоединенный к точке A_0^*, с различными триэдрами второго порядка, присоединенными к точке A_0.

Элемент касания второго порядка, следовательно, определяется семейством триэдров второго порядка, и обратно. Точно так же $d\sigma^2$ определяется заданием элемента касания второго порядка и дифференциалом одной из координат x, y, z.

Будем предполагать теперь обе кривые C и C^* ориентированными и будем считать, что касание второго порядка между двумя кривыми будет установлено только тогда, когда триэдр второго порядка *ориентированной* кривой C совпадает с триэдром второго порядка *ориентированной кривой* C^*.

34. Проблема касания третьего порядка. Пусть в точке A_0 между двумя ориентированными минимальными кривыми C и C^* установлено касание порядка, большего или равного 2:

всякий триэдр T_0^* второго порядка кривой C^*, имея вершину в точке A_0, совпадает с триэдром T_0 второго порядка кривой C с вершиной A_0. Чтобы осуществленное касание было выше второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти два равных инфинитезимальных смещения этих триэдров второго порядка. Это условие легко приводится к следующему: между дифференциалами главных параметров двух кривых должно существовать соотношение, дающее равенство главных компонент:

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_{11} = \omega_{11}^*.$$

Выберем в качестве T_0^* триэдр третьего порядка кривой C^*:

$$\omega_{11}^* = 0.$$

Тогда мы должны иметь

$$\omega_{11} = 0;$$

T_0 должен быть триэдром третьего порядка линии C; соответствие, которое надо установить между дифференциалами главных параметров, определяется равенством

$$\omega_1 = \omega_1^*,$$

оно всегда существует.

Решениями проблемы касания третьего порядка будут, следовательно, те перемещения, которые совмещают триэдры третьего порядка заданных кривых.

Элемент касания третьего порядка определяется триэдром третьего порядка, и обратно.

35. Проблемы касания порядков > 3. Пусть в точке A_0 между двумя ориентированными кривыми C и C^* установлено касание порядка $\geqslant 3$. Триэдры третьего порядка этих кривых, следовательно, совпадают. Чтобы касание имело порядок $\geqslant 4$, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти два равных инфинитезимальных смещения этих двух триэдров; это условие эквивалентно равенству $k = k^*$.

Предположим, что $k = k^*$; чтобы касание имело порядок $\geqslant 5$, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти два инфинитезимальных смещения этих двух триэдров, которые удовлетворяли бы условию $dk = dk^*$; это условие равносильно равенству $\frac{dk}{d\sigma} = \frac{dk^*}{d\sigma^*}$ и т. д. Отсюда получаем следующую теорему:

Пусть надо разрешить *проблему касания порядка* $p \geqslant 4$ в двух точках A_0 и A_0^* двух ориентированных минимальных кривых C и C^*. Условием возможности этой проблемы будет наличие в этих точках соотношений

$$k = k^*, \quad \frac{dk}{d\sigma} = \frac{dk^*}{d\sigma^*}, \ldots, \frac{d^{p-4}k}{d\sigma^{p-4}} = \frac{d^{p-4}k^*}{d\sigma^{*p-4}} .$$

Если эти соотношения выполняются, то проблема допускает только одно решение: перемещение, которое совмещает триэдры третьего порядка точек A_0 и A_0^*.

IV. ДОПОЛНЕНИЯ

Чтобы практически разрешить проблемы равенства и касания, нам надо уметь эффективно определять триэдры различных порядков и инвариант k. Мы покажем, как можно это сделать, двумя способами: с помощью вычисления и с помощью построений дифференциальной геометрии.

36. Аналитическое определение триэдров различных порядков, кривизны k и дифференциала $d\sigma$. Пусть минимальная кривая описывается точкой (x, y, z), а триэдр отнесения — триортогональный. Тогда имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Следовательно, существует параметр t такой, что

$$\frac{2dx}{1 - t^2} = \frac{2dy}{i(1 + t^2)} = \frac{dz}{t} .$$

Пусть $f(t)$ — общее значение этих отношений; тогда

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1 - t^2}{2} f(t)\, dt + x_0,$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} i \frac{1 + t^2}{2} f(t)\, dt + y_0,$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} t f(t)\, dt + z_0.$$

Эти формулы, называемые *формулами Вейерштрасса,* дают параметрическое представление наиболее общей минимальной кривой.

Я утверждаю, что одним из триэдров первого порядка будет следующий триэдр:

$\mathbf{J}_1$ имеет компонентами: $\dfrac{1-t^2}{2}, \quad i\,\dfrac{1+t^2}{2}, \quad t,$

$\mathbf{J}_2$ имеет компонентами: $-t, \qquad it, \qquad 1,$

$\mathbf{J}_3$ имеет компонентами: $1, \qquad -i, \qquad 0.$

Действительно, $\mathbf{J}_1$ будет касательной к кривой и

$$\mathbf{J}_1^2 = 0, \quad \mathbf{J}_2^2 = 1, \quad \mathbf{J}_3^2 = 0, \quad \mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 = 0,$$

$$\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3 = 0, \quad \mathbf{J}_1\mathbf{J}_3 = 1, \qquad (\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3) = i.$$

Формулы (8) позволяют вычислить компоненты $\overline{\omega}$ инфинитезимальных смещений этого триэдра:

$$\overline{\omega}_1 = \mathbf{J}_3\,d\mathbf{A} = f(t)\,dt, \qquad \overline{\omega}_{11} = \mathbf{J}_3\,d\mathbf{J}_1 = 0,$$

$$\overline{\omega}_{12} = \mathbf{J}_2\,d\mathbf{J}_1 = dt, \qquad \overline{\omega}_{21} = \mathbf{J}_3\,d\mathbf{J}_2 = 0.$$

Наиболее общий триэдр первого порядка определяется формулами (11) п. 27 (стр. 115), а формулы (12) п. 27 принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \frac{1}{\alpha} f(t)\,dt, && \omega_{11} = -\lambda\,dt + \frac{d\alpha}{\alpha}, \\ &\omega_{12} = \alpha\,dt, && \omega_{21} = \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\,dt + d\lambda\right). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Триэдры второго порядка определяются условием $\omega_1 = \omega_{12}$, которое равносильно равенству $\alpha = \sqrt{f}$; триэдры третьего порядка определяются условиями $\omega_1 = \omega_{12}$, $\omega_{11} = 0$, которые равносильны равенствам

$$\alpha = \sqrt{f}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\frac{f'}{f}.$$

Поскольку для этих триэдров третьего порядка

$$\omega_1 = d\sigma, \quad \omega_{21} = k\,d\sigma,$$

имеем

$$d\sigma = \sqrt{f}\,dt, \;\; k = \frac{1}{f}\left[\frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{5f'^2}{8f^2}\right]. \tag{25}$$

Приложение. Пусть требуется определить минимальные кривые постоянной кривизны. В силу (25), проблема сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{1}{f}\left[\frac{1}{2}\frac{f''}{f}-\frac{5}{8}\frac{f'^2}{f^2}\right]=\text{const}.$$

Будем искать частное решение вида $f=at^m$. Тогда получим

$$k=\frac{1}{at^{m+2}}\left[\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{5}{8}m^2\right].$$

Если $k=0$, то удобно взять $m=-4$. В противном случае надо брать

$$m=-2 \text{ и } a=\frac{1}{2k}.$$

В п. **31** (стр. 121) мы видели, что множество кривых заданной постоянной кривизны получается из некоторой частной кривой в результате операции наиболее общего перемещения.

Мы сейчас определим эти кривые вторым, более геометрическим способом.

37. Приложение «формул Френе» (20) к отысканию кривых постоянной кривизны. Предположим сначала $k=0$. Тогда $d\mathbf{I}_3=0$, следовательно, $\mathbf{I}_3$ — постоянный вектор, скажем $\mathbf{K}_3$. Уравнение

$$d\mathbf{I}_2=-\mathbf{I}_3\,d\sigma$$

дает

$$\mathbf{I}_2=-\sigma\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_2,$$

где $\mathbf{K}_2$ — новый постоянный вектор. Уравнение

$$d\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2\,d\sigma$$

дает

$$\mathbf{I}_1=-\frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{K}_3+\sigma\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1;$$

здесь $\mathbf{K}_1$ — третий постоянный вектор. Отсюда, если обозначить A_0 неподвижную точку, будем иметь

$$\overrightarrow{A_0A}=-\frac{1}{6}\sigma^3\mathbf{K}_3+\frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{K}_2+\sigma\mathbf{K}_1.$$

Мы получаем *пространственную кубическую линию,* соприкасающуюся с несобственной плоскостью в точке омбилического конического сечения (сферического круга).

Пусть теперь кривизна k — постоянное, но не равное нулю число. В силу формул (20), имеем

$$d\left(\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3\right) = 0;$$

следовательно,

$$\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3$$

— постоянный вектор $\left(\text{длины } \sqrt{\frac{2}{k}}\right)$. Получив этот результат, введем точку M с помощью соотношения

$$\overrightarrow{AM} = R\mathbf{I}_2,$$

где R — постоянный отрезок. Имеем:

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{A} + Rd\mathbf{I}_2 = [(1 + kR)\,\mathbf{I}_1 - R\mathbf{I}_3]\,d\sigma.$$

Возьмем

$$R = -\frac{1}{2k},$$

тогда получим

$$d\mathbf{M} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3\right]d\sigma;$$

$\frac{d\mathbf{M}}{d\sigma}$ — неподвижный вектор: точка M описывает прямую Δ, параллельную вектору $\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3$. Δ — не изотропная прямая, она перпендикулярна к $\mathbf{I}_2$; следовательно, A остается на цилиндре с осью Δ и радиусом R. Таким образом, *линиями постоянной, ненулевой кривизны будут минимальные винтовые линии (круглого цилиндра).*

Пусть задана такая винтовая линия и одна из ее точек A, тогда легко определить два триэдра третьего порядка $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, кривизну k и псевдодугу σ. Пусть AM — нормаль к цилиндру в точке A, а M — точка пересечения ее с осью. Эта прямая несет два единичных вектора; тот из них, который совпадает с $\mathbf{I}_2$, характеризуется следующим свойством:

первые векторы всех правых циклических триэдров, имеющих $\mathbf{I}_2$ своим вторым вектором, расположены на одной из изотропных прямых касательной плоскости цилиндра в точке A; эта изотропная прямая должна быть касательной минимальной винтовой линии. Положив теперь

$$\overrightarrow{AM} = R\mathbf{I}_2,$$

получим

$$k = -\frac{1}{2R}.$$

Векторы $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_3$ определены с точностью до множителя ± 1 в силу того, что вектор $\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3$ имеет опорой образующую цилиндра.

Наконец, соотношение

$$d\mathbf{M} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{I}_3\right)d\sigma$$

дает нам элемент псевдодуги.

38. Геометрическая интерпретация инварианта *k*. Существует единственная ориентируемая минимальная винтовая линия (круглого цилиндра), которая в данной точке заданной ориентируемой минимальной линии имеет с этой линией касание четвертого порядка: это винтовая линия, имеющая в этой точке ту же кривизну и тот же триэдр третьего порядка, что и данная минимальная линия. Винтовой линией, соответствующей противоположной ориентации, очевидно, будет та же самая винтовая линия, ориентированная в противоположном направлении. Эта линия, следовательно, присоединена геометрически к данной точке кривой независимо от всякой ориентации (надо отметить одно исключение — случай кривой нулевой кривизны; никакая минимальная винтовая линия не может осуществить касание четвертого порядка; но это касание может быть получено для минимальной кубической кривой нулевой кривизны).

Мы получаем, таким образом, геометрическую интерпретацию инварианта k — это кривизна указанной винтовой линии.

Точно также элемент дуги кривой есть бесконечно малая величина, эквивалентная элементу дуги винтовой линии; два триэдра третьего порядка кривой будут триэдрами третьего порядка винтовой линии. Но мы будем искать для этих эле-

ментов порядков <4 другие геометрические интерпретации, не использующие эту винтовую линию, которая является функцией элемента касания четвертого порядка. С этой целью мы будем изучать поведение минимальной кривой в окрестности одной из ее точек A.

39. Приведенные уравнения. Можно было бы, как мы это делали в п. **21** *bis*, попытаться прямо найти приведенные уравнения кривой в окрестности одной из ее точек A и вернуться отсюда к формулам Френе. Будем следовать здесь лучше обратным путем. Пусть

$$y = f(x, \sigma) = P_1(x, \sigma) + P_2(x, \sigma) + \ldots + P_n(x, \sigma) + \ldots,$$

$$z = \varphi(x, \sigma) = Q_1(x, \sigma) + Q_2(x, \sigma) + \ldots + Q_n(x, \sigma) + \ldots$$

— уравнения кривой, отнесенной к циклическому правому триэдру, присоединенному к точке A; $P_i(x, \sigma)$ и $Q_i(x, \sigma)$ означают однородные полиномы степени i относительно x, коэффициенты которых зависят от криволинейной абсциссы σ точки A. Возьмем на кривой фиксированную точку B с координатами x, y, z относительно циклического триэдра с началом A. Выражая, что точка с *текущими* координатами (x, y, z) *неподвижна*, получаем, в силу формул Френе (20) (стр. 119), соотношения:

$$\frac{dx}{d\sigma} + 1 + ky = 0,$$

$$\frac{dy}{d\sigma} + x - kz = 0,$$

$$\frac{dz}{d\sigma} - y \qquad = 0.$$

Отсюда вытекают соотношения:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(1 + kf) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} + x - k\varphi = 0,$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 + kf) + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - f \qquad = 0.$$

Эти соотношения имеют место, какова бы ни была точка A и какова бы ни была фиксированная точка B; следовательно, они будут тождествами относительно x и σ. Приравнивая нулю члены, не зависящие от x, и коэффициенты при раз-

личных степенях x в левых частях, получаем последовательно:

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} x^2, \qquad Q_2 = 0,$$

$$P_3 = 0, \qquad Q_3 = -\frac{1}{6} x^3,$$

$$P_4 = -\frac{1}{12} kx^4, \qquad Q_4 = 0,$$

$$P_5 = -\frac{1}{60} \frac{dk}{d\sigma} x^5, \quad Q_5 = \frac{1}{15} kx^5.$$

Следовательно, приведенными уравнениями кривой будут уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} kx^4 - \frac{1}{60} \frac{dk}{d\sigma} x^5 + \ldots, \\ z &= -\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{15} kx^5 + \ldots. \end{aligned} \right\} \qquad (26)$$

Впрочем, можно было бы ограничиться вычислением y, ибо

$$dy^2 + 2dxdz = 0,$$

откуда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

40. Геометрические построения псевдодуги.

а) Абсцисса x точки A', бесконечно близкой к точке A, дает псевдодугу σ приращения Δ', если точку A принять за начало. Но квадрат расстояния $AA' = c$ равен

$$c^2 = y^2 + 2xz \sim \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^4 \sim -\frac{1}{12} x^4 \sim -\frac{1}{12} d\sigma^4, \quad (27)$$

следовательно, $d\sigma^4$ — *бесконечно малая величина, эквивалентная* $-12c^2$.

Эта формула дает для $d\sigma$ четыре значения, которые соответствуют двум возможным ориентациям кривой и двум определениям правых циклических триэдров п. **23** (стр. 110), Но мы хотим получить геометрическую интерпретацию, кото-

рая дает нам только два значения $d\sigma$, соответствующие двум ориентациям кривой.

b) Для этого выберем произвольно направление D, не лежащее в нормальной плоскости и соприкасающееся к $A\ \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$, затем направление D' в этой плоскости, не параллельное касательной в точке A; рассмотрим параллелепипед, имеющий диагональю AA' и ребра параллельными касательной в точке A, направлениям D и D'. Если мы изменим выбор D и D', мы будем получать другие параллелепипеды (ориентированные), объемы которых будут бесконечно малыми величинами, эквивалентными v. Подсчитаем v, рассматривая следующий частный выбор: D параллельно $\mathbf{I}_3$, D' параллельно $\mathbf{I}_2$; формулы (26) (п. 39, стр. 130) и (5) (п. 23, стр. 111) дают

$$v = -\frac{i}{12}x^6 + \ldots \sim -\frac{i}{12}d\sigma^6.$$

Мы получаем, таким образом, наряду с формулой (27) новую формулу

$$d\sigma^6 = 12iv, \tag{28}$$

которая дает вторую геометрическую интерпретацию $d\sigma$.

c) Только деля почленно (27) и (28), мы получим рациональное выражение для $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = -\frac{iv}{c^2}. \tag{29}$$

Покажем, как эта формула позволит определить $d\sigma$, если известны в прямоугольных координатах параметрические уравнения кривой: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Имеем

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}(dt)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3}(dt)^3 + \ldots.$$

Примем за D' направление $\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$, а за D — направление $\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3}$. Тогда получим

$$v = \frac{1}{12}V(dt)^6,$$

где V — объем параллелепипеда с ребрами

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3},$$

т. е.

$$V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, c^2 — бесконечно малая величина, эквивалентная

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt^2 + \frac{1}{6}\,\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3}\,dt^3\right)^2.$$

Но

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = 0, \quad \left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)^2 + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\,\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3} = 0$$

и

$$c^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right)^2 dt^4 + \frac{1}{3}\,\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3} + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right) dt^2 + \ldots .$$

Формула (29), следовательно, дает

$$d\sigma^2 = i\,\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\,dt^2.$$

41. Приведенные параметрические уравнения. Можно одновременно с приведенными уравнениями (26) кривой получить выражения координат x, y, z точки, соседней с A, как функций псевдодуги σ точки M, подсчитанных, если за начало выбрана точка A. Уравнения Френе (20) в результате последовательного дифференцирования дают:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} = \mathbf{I}_1, \quad \frac{d^2\mathbf{A}}{d\sigma^2} = \mathbf{I}_2, \quad \frac{d^3\mathbf{A}}{d\sigma^3} = k\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3,$$

$$\frac{d^4\mathbf{A}}{d\sigma^4} = \frac{dk}{d\sigma}\,\mathbf{I}_1 + 2k\mathbf{I}_2, \ \ldots .$$

Отсюда получаем разложение

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma + \frac{1}{6} k\sigma^3 + \frac{1}{24} \frac{dk}{d\sigma} \sigma^4 + \ldots, \\ y &= \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{12} k\sigma^4 + \ldots, \\ z &= -\frac{1}{6} \sigma^3 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

невыписанные члены по меньшей мере пятого порядка. Эти формулы позволяют дать *геометрическое построение репера Френе.* Сначала строится вектор $\mathbf{I}_1$ как предел вектора $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\sigma}$. Чтобы построить вектор $\mathbf{I}_2$, рассмотрим две соседние с точкой A точки A' и A'' с абсциссами σ и $-\sigma$; пусть P — середина $A'A''$. В силу (30), имеем:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{I}_2 + \ldots.$$

Следовательно, $\mathbf{I}_2$ — предел вектора $2 \frac{\overrightarrow{AP}}{\sigma^2}$.

Замечание. Можно еще поступать следующим способом, не используя σ. Сфера с центром A и бесконечно малым радиусом пересекает кривую в четырех бесконечно близких к A точках. Из шести прямых, которые соединяют точку A с серединами шести отрезков, определяемых этими четырьмя точками, взятыми попарно, четыре стремятся к касательной в точке A к кривой, а две — к прямой, на которой расположен вектор $\mathbf{I}_2$. Чтобы определить, каким из двух единичных векторов на этой прямой будет $\mathbf{I}_2$, воспользуемся следующим свойством: первый вектор каждого из правых циклических триэдров, имеющих $\mathbf{I}_2$ своим вторым вектором, расположен на одной из двух изотропных прямых плоскости перпендикулярной к вектору $\mathbf{I}_2$ в точке A; эта прямая должна быть касательной к нашей кривой.

42. Важное замечание. Мы видим, таким образом, что *«формулы Френе»* (20) с помощью *«приведенных уравнений»* (26) и (30) позволяют получить геометрические построения и аналитические выражения триэдров, инвариантов и дифференциальных инвариантов, присоединенных к различным порядкам.

Во всех подобных вопросах мы будем также придавать капитальную важность аналогичным формулам, которые мы будем продолжать называть «*формулами Френе*». Напротив, мы не будем исходить для определения этих триэдров, этих инвариантов и этих дифференциальных инвариантов из явных уравнений [которыми здесь были формулы Вейерштрасса (стр. 124)].

Сделаем последнее замечание. Чтобы разрешать проблемы касания и равенства кривых в комплексной области, мы были вынуждены построить три различные теории, смотря по тому, будет ли идти речь о прямых, не минимальных или минимальных кривых. Однако вопрос еще не исчерпан, ибо плоские кривые, расположенные в изотропной плоскости, требуют специальной теории, которая, впрочем, не представляет никакой трудности и которую мы оставляем в стороне.

Глава III

ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

43. Порядок касания двух линейчатых поверхностей. *Линейчатая поверхность* — это поверхность, описанная подвижной прямой линией G, называемой образующей; эта прямая зависит от одного параметра. Совокупность всех прямых пространства зависит от четырех параметров; прямая, следовательно, может быть представлена как точка пространства четырех измерений, линейчатая поверхность — как линия в этом представляющем пространстве. Если две такие линии имеют общую точку и касание* порядка $p(\geqslant 0)$, то соответствующие линейчатые поверхности имеют общую образующую; мы будем говорить, что они имеют касание порядка p вдоль этой образующей. Мы будем называть при этом «элементом касания порядка p» множество действительных линейчатых поверхностей, имеющих попарно касание порядка p вдоль заданной образующей.

I. ЭЛЕМЕНТЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

44. Триэдры нулевого порядка**. Нам будет удобно считать образующую G ориентированной и ввести таким образом ориентацию линейчатых поверхностей. Конечно, образующая будет теперь рассматриваться как принадлежащая

* В дальнейшем будем говорить, что две кривые, имеющие общую точку и не касающиеся, имеют в этой точке касание нулевого порядка.

** Рассуждения, применяемые в этом пункте, непосредственно связаны с замечанием п. 27 (стр. 116).

сразу двум поверхностям только в том случае, когда она имеет одну и ту же ориентацию на этих двух поверхностях.

Мы будем называть тогда триэдрами нулевого порядка, присоединенными к ориентированной образующей G, правые триортогональные триэдры $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$, первый вектор $\mathbf{I}_1$ которых лежит на образующей G и имеет ориентацию образующей G.

Сравнение двух триэдров нулевого порядка $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ и $B\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \mathbf{B} + \rho\mathbf{J}_1 \text{ (это означает, что } \overrightarrow{BA} = \rho\mathbf{I}_1),\\ &\mathbf{I}_1 = \mathbf{J}_1,\\ &\mathbf{I}_2 = \quad \mathbf{J}_2 \cos\theta + \mathbf{J}_3 \sin\theta,\\ &\mathbf{I}_3 = -\mathbf{J}_2 \sin\theta + \mathbf{J}_3 \cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ρ и θ — произвольные параметры.

Семейство триэдров нулевого порядка линейчатой поверхности есть, следовательно, функция трех параметров: главного параметра, от которого зависит образующая, порождающая поверхность, и двух вторичных параметров. В силу принятых условий ориентации, это семейство триэдров непрерывное.

Заменяя $\mathbf{I}_1$ на $-\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ на $-\mathbf{I}_2$, мы преобразуем это семейство в семейство триэдров нулевого порядка поверхности, ориентированной противоположно.

Рассмотрим *шесть* компонент ω_i, ω_{ji} мгновенного смещения триэдра $A\ \mathbf{I}_1\ \mathbf{I}_2\ \mathbf{I}_3$ нулевого порядка. Обратим наше внимание на те из их линейных комбинаций, в которые не входят дифференциалы двух вторичных параметров. Они все получатся, если составлять линейные комбинации *четырех* из этих форм, которые мы будем называть *главными компонентами нулевого порядка*; они характеризуются свойством обращаться в нуль, когда дифференциал главного параметра равен нулю, т. е. когда триэдр меняется, соответствуя все время одной и той же образующей; но тогда дифференциал $d\mathbf{A}$ остается параллельным $\mathbf{I}_1$ и $d\mathbf{I}_1$ равно нулю; значит,

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_{12} = \omega_{13} = 0.$$

Следовательно, главными компонентами нулевого порядка будут формы

$$\boxed{\omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{13}}$$

Поставим себе задачей определить, как эти четыре главные компоненты зависят от вторичных параметров. Пусть $B\,\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ — второй подвижной триэдр нулевого порядка, соответствующий той же образующей, что и предыдущий триэдр. Мы имеем тогда соотношения (1). Пусть $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_{ji}$ — компоненты его инфинитезимального смещения. Поскольку положение $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ определяется заданием ρ, θ и положением $B\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$, можно подсчитать величины ω_i, ω_{ji} с помощью величин $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_{ji}$, ρ, θ, $d\rho$ и $d\theta$. Но главные компоненты ω_2, ω_3, ω_{12}, ω_{13} могут, очевидно, зависеть только от ρ, θ и главных компонент $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{13}$. Формулы (1) позволяют нам получить их действительные выражения; мы проведем выкладки, считая ρ и θ постоянными величинами, дифференциалы которых равны нулю. Имеем

$$\omega_2 = \mathbf{I}_2 d\mathbf{A} = (\mathbf{J}_2 \cos\theta + \mathbf{J}_3 \sin\theta)(d\mathbf{B} + \rho d\mathbf{J}_1) =$$
$$= (\bar{\omega}_2 \cos\theta + \bar{\omega}_3 \sin\theta) + \rho(\bar{\omega}_{12}\cos\theta + \bar{\omega}_{13}\sin\theta),$$
$$\omega_3 = \mathbf{I}_3 d\mathbf{A} = (-\mathbf{J}_2 \sin\theta + \mathbf{J}_3 \cos\theta)(d\mathbf{B} + \rho d\mathbf{J}_1) =$$
$$= (-\bar{\omega}_2 \sin\theta + \bar{\omega}_3\cos\theta) + \rho(-\bar{\omega}_{12}\sin\theta + \bar{\omega}_{13}\cos\theta),$$
$$\omega_{12} = \mathbf{I}_2 d\mathbf{I}_1 = (\mathbf{J}_2\cos\theta + \mathbf{J}_3\sin\theta)\, d\mathbf{J}_1 = \bar{\omega}_{12}\cos\theta + \bar{\omega}_{13}\sin\theta,$$
$$\omega_{13} = \mathbf{I}_3 d\mathbf{J}_1 = (-\mathbf{J}_2\sin\theta + \mathbf{J}_3\cos\theta)\, d\mathbf{J}_1 =$$
$$= -\bar{\omega}_{12}\sin\theta + \bar{\omega}_{13}\cos\theta.$$

В итоге:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_2 &= (\bar{\omega}_2 \cos\theta + \bar{\omega}_3 \sin\theta) + \rho(\bar{\omega}_{12}\cos\theta + \bar{\omega}_{13}\sin\theta),\\
\omega_3 &= (-\bar{\omega}_2 \sin\theta + \bar{\omega}_3\cos\theta) + \rho(-\bar{\omega}_{12}\sin\theta + \bar{\omega}_{13}\cos\theta),\\
\omega_{12} &= \bar{\omega}_{12}\cos\theta + \bar{\omega}_{13}\sin\theta,\\
\omega_{13} &= -\bar{\omega}_{12}\sin\theta + \bar{\omega}_{13}\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

45. Триэдры первого порядка. Эти формулы показывают, что среди триэдров нулевого порядка, присоединенных к образующей G, существует два триэдра*, для которых ω_{13} и ω_2 равны нулю; они симметричны относительно образующей G;

---

* Надо отметить одно исключение: это случай, когда $(\omega_{12})^2 + (\omega_{13})^2 = 0$. Поскольку поверхность действительная, это соотношение может иметь место только при $\omega_{12} = \omega_{13} = 0$, откуда $d\mathbf{I}_1 = 0$; если так будет для всякой образующей, то вектор $\mathbf{I}_1$ постоянен: поверхность является цилиндром.

каждый из них порождает непрерывное семейство, эти два семейства не имеют общего элемента. Мы выберем одно из этих семейств, подчиняя тем самым нашу линейчатую поверхность *второй операции ориентации*. Триэдры этого семейства будут называться триэдрами первого порядка; каждая образующая обладает одним и только одним таким триэдром.

Из четырех главных компонент нулевого порядка две остаются отличными от нуля: ω_3 и ω_{12}. Положим $\omega_{12}=d\sigma$, $\omega_3=kd\sigma$; назовем k инвариантом первого порядка, а $d\sigma$ — дифференциальным инвариантом первого порядка.

Положим также $\omega_1=\alpha d\sigma$ и $\omega_{23}=\beta d\sigma$; мы будем говорить, что α и β — два инварианта второго порядка.

Смещение триэдра первого порядка определяется «*формулами Френе*»:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\sigma(\alpha\mathbf{I}_1 + k\mathbf{I}_3), & d\mathbf{I}_2 &= d\sigma(-\mathbf{I}_1 + \beta\mathbf{I}_3), \\ d\mathbf{I}_1 &= d\sigma\,\mathbf{I}_2, & d\mathbf{I}_3 &= d\sigma(-\beta\mathbf{I}_2). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Замечание. Возможны четыре ориентации. При переходе от одной к другой триэдр первого порядка переходит в симметричный относительно одного из своих ребер триэдр.

Теорема структуры. *Пусть даны произвольные функции* $k(\sigma)$, $\alpha(\sigma)$ *и* $\beta(\sigma)$. *В силу теоремы структуры, изложенной в п.* 7 (стр. 93), *существует правый триортогональный триэдр* $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, *зависящий от параметра* σ, *который удовлетворяет уравнениям* (3). *Это триэдр нулевого порядка линейчатой поверхности, которую порождает* $\mathbf{I}_1$. *Но соотношения* $\omega_{13}=0$, $\omega_2=0$ *доказывают, что это также и триэдр первого порядка этой поверхности. Отсюда следует теорема структуры: на линейчатой поверхности* k, α *и* β *— произвольные функции переменной* σ.

Замечание. Если $k=0$, то поверхность развертывающаяся и точка A описывает ребро возврата ее, триэдр $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ — не что иное, как триэдр Френе этой кривой, но формулы Френе (3), где $k=0$, не будут формулами Френе теории кривых. Величина $d\sigma$ в формулах (3) равна углу смежности ρds; отсюда имеем $\alpha=\frac{1}{\rho}$, $\beta=\frac{\tau}{\rho}$. Эти результаты не должны нас удивлять, ибо нет никакого основания считать, что мы получим одни и те же инварианты и в том же порядке, будем ли рассматривать кривую как *геометрическое место точек* или как *огибающую прямых*; проблемы касания не будут одними и теми же и т. д.

II. ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА И КАСАНИЯ; ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

46. Проблема равенства. Пусть надо отыскать все способы наложения двух заданных ориентированных линейчатых поверхностей. Основное условие равенства (п. 7, стр. 93) показывает, что эта проблема сводится к установлению всех соответствий между их образующими, которые взаимно однозначны и при которых выполняются четыре равенства:

$$d\sigma = d\sigma^*, \quad k = k^*, \quad \alpha = \alpha^*, \quad \beta = \beta^*.$$

В частности, единственными линейчатыми поверхностями, которые могут скользить сами по себе, служат такие линейчатые поверхности, для которых k, α и β будут постоянными величинами (их можно получить, подвергнув прямую винтовому движению).

47. Проблемы касания. *Проблема касания нулевого порядка.* Перемещения, которые совмещают две заданные образующие G и G^* двух линейчатых ориентированных поверхностей, — это, очевидно, такие перемещения, которые совмещают триэдр нулевого порядка образующей G^* с наиболее общим триэдром нулевого порядка образующей G.

Чтобы приступить к *проблемам касания порядка* $p(>0)$, мы используем *условие касания,* аналогичное условию касания п. 16 (стр. 101).

Для того чтобы две линейчатые ориентированные поверхности имели вдоль образующей G_0 касание порядка $\geqslant p+1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали образующая G первой поверхности и образующая G^* второй, бесконечно близкие к G_0 и такие, что соотношения, выражающие, что эти две поверхности имеют вдоль образующих G и G^* касание порядка $\geqslant p$, выполняются с точностью до бесконечно малых, порядок которых выше, чем разность параметров G_0 и G.

Прилагая это условие касания, постепенно получим следующее заключение: единственным перемещением, которое может осуществить вдоль двух образующих двух линейчатых ориентированных поверхностей касание порядка $p \geqslant 1$, будет такое перемещение, которое совмещает триэдры первого порядка образующих; а чтобы оно действительно осуществляло это касание, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие равенства:

для $p=1: k=k^*$,

для $p=2: k=k^*,\ \alpha=\alpha^*,\ \beta=\beta^*,\ \frac{dk}{d\sigma}=\frac{dk^*}{d\sigma^*}$,

для $p>2: k=k^*,\ \alpha=\alpha^*,\ \beta=\beta^*,\ \frac{d^lk}{\partial\sigma^l}=\frac{d^lk^*}{\partial\sigma^{*l}}$,

$$\frac{d^n\alpha}{d\sigma^n}=\frac{d^n\alpha^*}{d\sigma^{*n}},\quad \frac{d^n\beta}{d\sigma^n}=\frac{d^n\beta^*}{d\sigma^{*n}}\ (l\leqslant p-1,\ n\leqslant p-2).$$

48. **Геометрические построения.** Определим касательную плоскость к поверхности в точке C образующей. Положим $\overrightarrow{AC}=\rho\mathbf{I}_1$; тогда

$$d\mathbf{C}=(\alpha\mathbf{I}_1+k\mathbf{I}_3)\,d\sigma+\mathbf{I}_1 d\rho+\rho\mathbf{I}_2 d\sigma.$$

Касательная плоскость в точке C содержит, следовательно, вектор $\mathbf{I}_1$ и вектор, перпендикулярный вектору $\rho\mathbf{I}_2+k\mathbf{I}_3$.

Таким образом, мы получаем, что плоскость $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$ — не что иное, как асимптотическая плоскость; плоскость $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3)$ — центральная плоскость, а A — центральная точка, т. е. точка, в которой касательная плоскость перпендикулярна к асимптотической плоскости. Наконец, $\frac{k}{\rho}$ — тангенс угла, на который надо повернуть вокруг оси $\mathbf{I}_1$ асимптотическую плоскость, чтобы перейти к касательной плоскости в точке C; k есть, следовательно, параметр распределения.

Формула $d\mathbf{A}=(\alpha\mathbf{I}_1+k\mathbf{I}_2)\,d\sigma$ доказывает, что $\frac{k}{\alpha}$ — тангенс угла, под которым стрикционная линия (т. е. геометрическое место центральных точек) пересекает образующую.

Наконец, через фиксированную точку O проведем вектор $\overrightarrow{OP}$, равный $\mathbf{I}_1$; точка P описывает сферическую кривую. Формула $d\mathbf{P}=\mathbf{I}_2 d\sigma$ показывает, что σ — дуга этой сферической кривой; формула $d\mathbf{I}_2=(-\mathbf{I}_1+\beta\mathbf{I}_3)\,d\sigma$ показывает, что β для нее будет геодезической кривизной.

Глава IV

ТЕОРИЯ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА; КАСАНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

49. Триэдры нулевого порядка. Назовем линейчатые поверхности *изотропными*, если все образующие их изотропны. Продолжим определять касание, как в п. 43 (стр. 135).

Триэдрами нулевого порядка, присоединенными к образующей G, будут правые циклические триэдры $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, первый вектор которых лежит на образующей G.

Чтобы две изотропные линейчатые поверхности имели *касание нулевого порядка,* необходимо и достаточно, чтобы два их триэдра нулевого порядка совпадали.

Сравнение двух триэдров нулевого порядка $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ *и* $B\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$, *соответствующих одной и той же образующей.* Мы имеем [ср. формулы (11) п. 27, стр. 115]:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \mathbf{B} + \rho\mathbf{I}_1 \quad (\text{что означает: } \overrightarrow{BA} = \rho\mathbf{I}_1),\\ &\mathbf{I}_1 = \mu\mathbf{J}_1,\\ &\mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1,\\ &\mathbf{I}_3 = \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right], \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где λ, μ и ρ — произвольные параметры.

Триэдр нулевого порядка изотропной линейчатой поверхности зависит, следовательно, от одного главного параметра и трех вторичных параметров.

Рассмотрим шесть компонент его мгновенного смещения: ω_1, ω_2, ω_3, ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}. Рассмотрим те линейные комбинации этих компонент, в которые не входят дифференциалы трех вторичных параметров; все эти комбинации получатся, если линейно комбинировать три из этих компонент, которые мы будем называть *главными компонентами нулевого порядка*. Они характеризуются свойством обращаться в нуль вместе с дифференциалом главного параметра. Но, когда этот дифференциал обращается в нуль, векторы $d\mathbf{I}_1$ и $d\mathbf{A}$ параллельны вектору $\mathbf{I}_1$, следовательно, $\omega_{12}=\omega_2=\omega_3=0$. Поэтому компонентами нулевого порядка служат формы

$$\boxed{\omega_{12}, \quad \omega_2, \quad \omega_3.}$$

Определим, как эти три компоненты ω_2, ω_3, ω_{12} зависят от вторичных параметров. Рассмотрим снова два триэдра нулевого порядка $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ и $B\,\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ одной и той же образующей; обозначим через ω и $\overline{\omega}$ соответствующие компоненты их инфинитезимальных смещений. Формулы (1) вместе с формулами (7) и (8) п. **24** (стр. 112) позволяют выразить ω_2, ω_3, ω_{12} как функции от $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, $\overline{\omega}_{12}$, λ, μ и ρ; вычисление будет выполняться, как если бы $d\lambda$, $d\mu$ и $d\rho$ были тождественно равны нулям. Получим

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \mathbf{I}_2 d\mathbf{A} = (\mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1)(d\mathbf{B} + \rho d\mathbf{J}_1) = \overline{\omega}_2 + \lambda\overline{\omega}_3 + \rho\overline{\omega}_{12},\\
\omega_3 &= \mathbf{I}_1 d\mathbf{A} = \mu\mathbf{J}_1(d\mathbf{B} + \rho d\mathbf{J}_1) = \mu\overline{\omega}_3,\\
\omega_{12} &= \mathbf{I}_2 d\mathbf{I}_1 = (\mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1)\mu d\mathbf{J}_1 = \mu\overline{\omega}_{12}.
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_2 &= \overline{\omega}_2 + \lambda\overline{\omega}_3 + \rho\overline{\omega}_{12},\\
\omega_3 &= \mu\overline{\omega}_3,\\
\omega_{12} &= \mu\overline{\omega}_{12}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

50. Триэдры первого порядка. Эти формулы (2) показывают, что выражение $\frac{\omega_3}{\omega_{12}}$ имеет одно и то же значение* для

* Мы предполагаем, что ω_{12} не равно нулю; если ω_{12} было бы тождественно равно нулю, то $d\mathbf{I}_1$ было бы постоянно параллельно $\mathbf{I}_1$; $\mathbf{I}_1$ имело бы постоянное направление; поверхность была бы цилиндром — случай, который мы исключаем.

всех триэдров нулевого порядка; мы будем называть это выражение *инвариантом первого порядка* и обозначать k.

Имеем:

$$\omega_2 = \overline{\omega}_2 + (\rho + \lambda k)\,\overline{\omega}_{12};$$

существуют, следовательно, среди триэдров нулевого порядка, присоединенных к одной образующей, некоторые триэдры, для которых ω_2 равно нулю. Эти триэдры мы назовем *триэдрами первого порядка*.

Теперь мы будем иметь

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = k\omega_{12}. \tag{3}$$

Проблема касания первого порядка легко решится, если использовать условие касания, полученное в п. **47**; чтобы такое касание было возможно, необходимо и достаточно, чтобы два инварианта первого порядка образующих, которые мы хотим совместить, были равны; когда это условие будет удовлетворено, смещениями, которые осуществляют касание, будут такие смещения, которые налагают на наиболее общий триэдр первого порядка первой образующей какой-нибудь частный триэдр первого порядка второй образующей.

Сравнение двух триэдров первого порядка $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ *и* $B\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$ *соответствующих одной и той же образующей.*

Формулы (1) все еще имеют силу, если положить там

$$\rho + \lambda k = 0.$$

Другими словами, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{A} = \mathbf{B} - \lambda k \mathbf{J}_1,\\
&\mathbf{I}_1 = \mu \mathbf{J}_1,\\
&\mathbf{I}_2 = \mathbf{J}_2 + \lambda \mathbf{J}_1,\\
&\mathbf{I}_3 = \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{J}_3 - \lambda \mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Триэдры первого порядка изотропной линейчатой поверхности зависят, следовательно, от одного главного параметра и *двух* вторичных параметров.

Число вторичных параметров, от которых зависят триэдры первого порядка, на *единицу* меньше числа вторичных параметров, от которых зависят триэдры нулевого порядка; те линейные комбинации их компонент, в которые не входят дифференциалы вторичных параметров, должны, следова-

тельно, быть линейными комбинациями главных компонент, число которых на *единицу* больше. Эта новая главная компонента будет называться *главной компонентой первого порядка.* Но, когда триэдр $B\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$ остается неподвижным, а λ и μ меняются, имеем:

$$d\mathbf{A} = -k\,d\lambda\,\mathbf{J}_1, \quad d\mathbf{I}_2 = d\lambda\mathbf{J}_1,$$

поэтому

$$d\mathbf{A} + k\,d\mathbf{I}_2 = 0, \quad \omega_1 + k\omega_{21} = 0.$$

Форма $\omega_1 + k\omega_{21}$, следовательно, и будет главной компонентой первого порядка. Окончательно получаем, что главными компонентами триэдра первого порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1
ω_{12}, $\omega_2\,(=0)$, $\omega_3\,(=k\omega_{12})$	$\omega_1 + k\omega_{21}$

Чтобы определить, как форма $\omega_1 + k\omega_{21}$ зависит от вторичных параметров, используем формулы (4) и формулы (7) и (8) п. **24** (стр. 112); в выкладке мы заменяем $d\lambda$ и $d\mu$ нулями (напротив, заменить dk нулем мы не имеем права):

$$\omega_1 + k\omega_{21} = \mathbf{I}_3 \cdot (d\mathbf{A} + k d\mathbf{I}_2) = \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right) \cdot$$

$$\cdot\,(d\mathbf{B} + k\,d\mathbf{J}_2 - \lambda\,dk\,\mathbf{J}_1) = \frac{1}{\mu}\,(\overline{\omega}_1 + k\overline{\omega}_{21}) - \frac{\lambda}{\mu}\,dk.$$

Формулами, которые показывают, как главные компоненты порядка $\leqslant 2$ зависят от вторичных параметров, будут, следовательно, формулы:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{12} &= \mu\overline{\omega}_{12}, \\ \omega_1 + k\omega_{21} &= \frac{1}{\mu}\,(\overline{\omega}_1 + k\overline{\omega}_{21}) - \frac{\lambda}{\mu}\,dk. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь *возникает одна особенность,* с которой мы еще не встречались: инвариант k вводится раньше, чем мы построим триэдр Френе; отсюда мы выведем в третьей части этой главы (п. **55**) небольшое видоизменение нашего обычного процесса. Мы изучим сначала во втором разделе специальный случай: случай, когда рассматриваются изотропные линейчатые поверхности, на которых инвариант k равен заданной

константе. Но сначала мы разберем *еще более исключительный случай.*

51. Поверхности, на которых инвариант k постоянен и форма $\omega_1 + k\omega_{21}$ тождественно равна нулю. Формулы (5) показывают, что форма $\omega_1 + k\omega_{21}$ тождественно равна нулю, каков бы ни был рассматриваемый триэдр первого порядка; они не позволяют выделять специальные триэдры в семействе триэдров первого порядка. У нас получился случай, аналогичный тому, который мы рассматривали в п. **30** (стр. 119).

Пусть даны две поверхности, на которых инвариант k имеет одно и то же значение; пусть T и T^* — их триэдры первого порядка. Выберем однопараметрическое семейство триэдров T; каждому из них можно поставить в соответствие подвижной триэдр T^*, мгновенное смещение которого имеет те же инфинитезимальные компоненты, таким образом, что два произвольно выбранных триэдра T_0 и T_0^* будут соответствующими: для этого достаточно проинтегрировать уравнения

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_{12} = \omega_{12}^*, \quad \omega_{11} = \omega_{11}^*,$$

которые образуют систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями.

Основное условие равенства (п. **26**, стр. 114) позволяет вывести отсюда следующее заключение: перемещение, которое совмещает произвольные триэдры первого порядка T_0 и T_0^*, совмещает эти две поверхности.

В частности, трехпараметрическое семейство перемещений позволяет преобразовать саму в себя каждую из этих поверхностей; отсюда заключаем, что никакой триэдр первого порядка не может обладать специальными внутренними свойствами.

Читатель догадался, что рассматриваемые поверхности — *сферы*; это легко проверить. Рассмотрим точку

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + k\mathbf{I}_2. \tag{6}$$

Предыдущие формулы позволяют установить, что

$$d\mathbf{P} = 0.$$

Следовательно, точка P неподвижна, точка A описывает сферу с центром P, вектор $\mathbf{I}_2$ лежит на радиусе; длина этого радиуса равна $\pm k$ (знак k меняется вместе с изменением системы образующих, порождающих сферу).

52. Геометрическое построение инварианта k. Рассмотрим изотропную линейчатую поверхность и одну из ее образую-

щих. Существует сфера, и только одна, которая имеет касание первого порядка с этой поверхностью вдоль этой образующей (в действительности эта сфера определяется заданием двух образующих, впрочем бесконечно близких). Ее радиус равен $\pm k$. Ее центр, в силу (6), лежит в точке $\mathbf{P} = \mathbf{A} + k\mathbf{I}_2$ (формулы (4) позволяют проверить, что эта точка не зависит от выбора триэдра первого порядка $A\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$).

Заметим, что центр сферы принадлежит изотропной плоскости * каждой из ее образующих; следовательно, точка P расположена на характеристической прямой изотропной плоскости, которая проходит через образующую нашей линейчатой поверхности; эта характеристическая прямая также изотропна; она является геометрическим местом точек

$$\mathbf{A} + k\mathbf{I}_2 + x\mathbf{I}_1, \tag{7}$$

где x — переменный параметр. Легко проверить, что вектор

$$d(\mathbf{A} + k\mathbf{I}_2 + x\mathbf{I}_1)$$

параллелен изотропной плоскости $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$.

Инвариант k есть расстояние ** от образующей до этой характеристической прямой. Точнее, выберем произвольный правый циклический триэдр $A\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$, такой, чтобы точка A и вектор $\mathbf{I}_1$ лежали на образующей; тогда значение инварианта k таково, что характеристическая прямая служит геометрическим местом точек (7). Мы получаем таким образом вторую геометрическую интерпретацию инварианта k.

Эта характеристическая прямая огибает минимальную кривую и порождает развертывающуюся поверхность, касательные плоскости которой — изотропные плоскости образующих нашей линейчатой поверхности; чтобы охарактеризовать линейчатую поверхность, достаточно, следовательно, задать эту минимальную кривую и длину k, присоединенную к каждой из ее точек. Геометрическую интерпретацию новых элементов, которые мы только что присоединили к изотропным линейчатым поверхностям, можно было бы осуществить с помощью элементов этой минимальной кривой.

---

* Изотропная плоскость есть плоскость, касательная к омбиликальной сфере; она содержит только одно направление изотропных прямых.

** Все секущие двух изотропных прямых одной и той же изотропной плоскости будут их общими перпендикулярами, они все имеют одну и ту же длину. Напротив, в неизотропной плоскости две параллельные изотропные прямые не имеют ни одного общего перпендикуляра; расстояние между этими двумя параллелями определить невозможно.

II. ПОВЕРХНОСТИ, НА КОТОРЫХ ИНВАРИАНТ k ПОСТОЯНЕН

53. Триэдры второго порядка. Если инвариант k имеет постоянное значение, то формулы (5) можно записать в виде

$$\omega_{12} = \mu\bar{\omega}_{12},$$

$$\omega_1 + k\omega_{21} = \frac{1}{\mu}(\bar{\omega}_1 + k\bar{\omega}_{21}).$$

Мы предположим *, что ω_{12} и $\omega_1+k\omega_{21}$ отличны от нуля. Каждая образующая обладает тогда такими триэдрами первого порядка, для которых

$$\omega_{12} = \omega_1 + k\omega_{21}. \tag{8}$$

Эти триэдры образуют два различных непрерывных семейства, которые получаются одно из другого заменой $\mathbf{I}_1$ на $-\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_3$ на $-\mathbf{I}_3$.

Выберем произвольно одно из этих семейств, что составит операцию *ориентации.* Триэдры этого семейства назовем триэдрами второго порядка ориентированной изотропной линейчатой поверхности.

Пусть даны две изотропные линейчатые поверхности, инварианты k которых имеют одно и то же значение; *проблема касания второго порядка* всегда возможна; ее решениями служат те перемещения, которые совмещают триэдры второго порядка обеих поверхностей.

Сравнение двух триэдров второго порядка $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ и $B\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{J}_3$, , *соответствующих одной и той же образующей.* Заменяя в (4) μ на 1, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{B} - \lambda k\mathbf{J}_1,\\
\mathbf{I}_1 &= \mathbf{J}_1,\\
\mathbf{I}_2 &= \mathbf{J}_2 + \lambda\mathbf{J}_1,\\
\mathbf{I}_3 &= \mathbf{J}_3 - \lambda\mathbf{J}_2 - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Имеем также

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_{12}.$$

---

* Поверхности, на которых форма ω_{12} тождественно равна нулю,— цилиндры (см. сноску на стр. 142), а поверхности, на которых форма $\omega_1+k\omega_{21}$ тождественно равна нулю, — сферы (см. п. 51, стр. 145).

Форма ω_{12} зависит, следовательно, только от главного параметра и его дифференциала; она образует *дифференциальный инвариант второго порядка.* Мы будем обозначать ее $d\sigma$. Число параметров, от которых зависят триэдры второго порядка, на *единицу* меньше числа параметров, от которых зависят триэдры первого порядка; те линейные комбинации их компонент, в которых не встречаются дифференциалы вторичных параметров, должны быть линейными комбинациями главных параметров, число которых на *единицу* больше. Мы будем называть эту новую главную компоненту главной компонентой второго порядка. Однако, когда триэдр $B\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{J}_3$, неподвижен и λ меняется, $d\mathbf{I}_1=0$, следовательно, $\omega_{11}=0$. Значит, ω_{11} будет главной компонентой второго порядка. Окончательно, главными компонентами триэдра второго порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2
$\omega_{12},\ \omega_2\,(=0),\ \omega_3\,(=k\omega_{12})$	$\omega_1+k\omega_{21}\,(=\omega_{12})$	ω_{11}

Формулы (9) и формулы (7) и (8) п. **24** дают

$$\omega_{11}=\mathbf{I}_3 d\mathbf{I}_1=\left(\mathbf{J}_3-\lambda\mathbf{J}_2-\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{J}_1\right)\cdot d\mathbf{J}_1=\bar{\omega}_{11}-\lambda\bar{\omega}_{12}.$$

Отсюда получается формула, которая показывает, как главная компонента второго порядка зависит от вторичного параметра:

$$\omega_{11}=\bar{\omega}_{11}-\lambda\,d\sigma. \tag{10}$$

54. Триэдры третьего порядка. Формула (10) показывает, что каждая образующая нашей ориентированной поверхности допускает триэдр второго порядка, и только один, такой, что

$$\omega_{11}=0.$$

Назовем его триэдром третьего порядка; замена ориентации преобразует этот триэдр в симметричный ему относительно $\mathbf{I}_2$ триэдр.

Положим теперь $\omega_{21}=\alpha d\sigma$ и будем говорить, что α — *инвариант четвертого порядка.*

При этих условиях смещение триэдра третьего порядка определяется *«формулами Френе»*:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\sigma(1-k\alpha)\,\mathbf{I}_1 + d\sigma\, k\mathbf{I}_3,\\ d\mathbf{I}_1 &= d\sigma\,\mathbf{I}_2,\\ d\mathbf{I}_2 &= d\sigma(\alpha\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3),\\ d\mathbf{I}_3 &= -\alpha\, d\sigma\,\mathbf{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

55. Дополнения. *Проблемы касания третьего порядка.* Пусть даны две ориентированные поверхности, на которых инвариант k имеет одно и то же постоянное значение. Проблемы касания порядков $p \geqslant 3$ допускают самое большее одно решение: перемещение, которое совмещает два триэдра третьего порядка.

Проблема всегда возможна для $p=3$.

Она возможна для $p>3$, если только $\alpha, \ldots, \dfrac{d^{p-4}\alpha}{d\sigma^{p-4}}$ имеют одни и те же значения для двух рассматриваемых образующих.

Проблема равенства. Она возможна, если только постоянная k одна и та же для двух рассматриваемых поверхностей: основное условие п. **26** (стр. 114) сводит эту проблему к отысканию всех соответствий между образующими двух поверхностей, при которых выполняются равенства

$$\alpha(\sigma) = \alpha^*(\sigma^*), \quad d\sigma = d\sigma^*.$$

Теорема структуры. Рассуждения, аналогичные тем, которыми мы пользовались в п. **29**, позволяют вывести из теоремы структуры, сформулированной в п. **25** (стр. 113), следующий результат: инварианты k и $\alpha(\sigma)$ могут быть соответственно константой и произвольной функцией от σ.

Геометрические построения. Рассмотрим снова точку

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + k\mathbf{I}_2$$

— центр сферы, которая имеет касание первого порядка с поверхностью вдоль образующей, несущей вектор $\mathbf{I}_1$. В силу формул Френе (11), имеем

$$d\mathbf{P} = d\sigma\,\mathbf{I}_1, \quad d\mathbf{I}_2 = d\sigma(\alpha\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3),$$

$$d\mathbf{I}_1 = d\sigma\,\mathbf{I}_2, \quad d\mathbf{I}_3 = -\alpha\, d\sigma\,\mathbf{I}_2.$$

Эти формулы, с точностью до обозначений, будут формулами Френе для минимальных кривых [п. **29**, формулы (20), стр. 119]. Следовательно, точка P есть характеристическая точка изотропной плоскости, которая проходит через образующую нашей линейчатой поверхности; $d\sigma$ является* псевдодугой, α — кривизной минимальной кривой, порождаемой точкой P; $P\,\mathbf{I}_1\,\mathbf{I}_2\,\mathbf{I}_3$ будет для этой кривой «триэдром Френе».

Если $k=0$, точка A совпадает с P, и мы возвращаемся к формулам Френе минимальных кривых.

III. ПОВЕРХНОСТИ, НА КОТОРЫХ ИНВАРИАНТ k — ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА

56. Триэдры второго порядка. Инвариант первого порядка k, когда он не будет постоянным вдоль кривой, образует натуральный главный параметр.

Формулы (5) (стр. 144) показывают, что каждая образующая обладает триэдром первого порядка, и только одним, таким, что

$$\omega_{12} = dk, \quad \omega_1 + k\omega_{21} = 0. \tag{12}$$

Назовем этот триэдр *триэдром второго порядка.*

Проблема касания второго порядка. *Пусть даны две образующие G_0 и G_0^* двух поверхностей и перемещение, которое осуществляет вдоль этих образующих касание порядка* $\geqslant 1$: *оно налагает один какой-нибудь триэдр T_0^* первого порядка, присоединенный к образующей G_0^*, на триэдр первого порядка T_0, присоединенный к образующей G. Чтобы порядок касания превышал* 1, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* п. **16** (стр. 101).

Это условие выражается следующим образом: существуют равные инфинитезимальные перемещения триэдров первого порядка T_0 и T_0^*, для которых

$$dk = dk^* \neq 0.$$

Другими словами, система

$$dk = dk^*, \ \omega_1 = \omega_1^*, \ \omega_{12} = \omega_{12}^*, \ \omega_{21} = \omega_{21}^*, \ \omega_{11} = \omega_{11}^*$$

должна допускать такое решение, что $dk \neq 0$.

---

* Это выполняется благодаря согласованной ориентации линейчатой поверхности и минимальной кривой.

Задача отыскания такого решения сводится, очевидно, к тому, чтобы найти одно решение для следующей системы, из которой исключены неглавные компоненты:

$$dk = dk^*, \ \omega_{12} = \omega_{12}^*, \ \omega_1 + k\omega_{21} = \omega_1^* + k\omega_{21}^*.$$

Предположим, что T_0^* — триэдр второго порядка образующей G_0^*. Триэдр T_0 тогда должен быть триэдром второго порядка образующей G_0, и если T_0 будет этим триэдром, то указанная выше система будет разрешима. Мы приходим, следовательно, к следующему заключению.

Если проблема касания первого порядка возможна, т. е. если параметры k и k^* двух заданных образующих равны между собой, то проблема касания второго порядка допускает решение и только одно: этим решением будет перемещение, которое совмещает два триэдра второго порядка.

57. Формулы Френе. Рассмотрим мгновенное смещение триэдра второго порядка; положим

$$\omega_{21} = \alpha\, dk, \quad \omega_{11} = \beta\, dk,$$

величины α и β назовем *инвариантами третьего порядка.* Мы имеем *формулы Френе:*

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= -\alpha k\, dk\mathbf{I}_1 + k\, dk\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \beta\, dk\, \mathbf{I}_1 \quad + dk\mathbf{I}_2, \\ d\mathbf{I}_2 &= \alpha\, dk\, \mathbf{I}_1 \quad - dk\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= -\alpha dk\, \mathbf{I}_2 \quad - \beta dk\mathbf{I}_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Проблемы касания порядков $p \geqslant 3$ допускают самое большое одно решение — перемещение, которое совмещает триэдры второго порядка. Чтобы это решение существовало, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

для $p = 3$:

$$k = k^*, \ \alpha = \alpha^*, \ \beta = \beta^*;$$

для $p > 3$

$$k = k^*, \ \alpha = \alpha^*, \ \beta = \beta^*,$$

$$\frac{d\alpha}{dk} = \frac{d\alpha^*}{dk^*}, \ldots, \frac{d^{p-3}\alpha}{dk^{p-3}} = \frac{d^{p-3}\alpha^*}{dk^{*p-3}},$$

$$\frac{d\beta}{dk} = \frac{d\beta^*}{dk^*}, \ldots, \frac{d^{p-3}\beta}{dk^{p-3}} = \frac{d^{p-3}\beta^*}{dk^{*p-3}}.$$

П р о б л е м а   р а в е н с т в а. *Для того чтобы две наши поверхности были равны, необходимо и достаточно, чтобы функции $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ были тождественно одними и теми же на этих поверхностях.*

Геометрические построения. Точка $\mathbf{P}=\mathbf{A}+k\mathbf{I}_2$ п. **52** не будет более характеристической точкой изотропной плоскости образующей; действительно, имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dk}=\mathbf{I}_2;$$

но характеристическая точка Q этой изотропной плоскости выделяется следующим свойством: вектор $d\mathbf{Q}$ параллелен вектору $\mathbf{I}_1$. Легко получается, что

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}-\mathbf{I}_1.$$

Это та точка Q, которая порождает минимальную кривую, введенную в конце п. **51** и с помощью которой можно получить геометрические построения. Впрочем, соотношения

$$\mathbf{I}_1=\overrightarrow{QP}, \quad \mathbf{I}_2=\frac{d\mathbf{P}}{dk}, \; \overrightarrow{AP}=k\mathbf{I}_2$$

достаточны для того, чтобы геометрически определить триэдр второго порядка.

Часть вторая

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

Глава V

ПОДВИЖНОЙ РЕПЕР КОНЕЧНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ГРУППЫ

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ; ГРУППА; ПОДВИЖНОЙ РЕПЕР

58. Преобразования, обратные преобразования, произведения преобразований. Пусть M — произвольная точка пространства n измерений; эта точка определяется системой n координат $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть D — область этого пространства, которая может быть и всем пространством. *Преобразованием* области D в себя называется всякое соответствие, которое каждой точке M области D сопоставляет единственную точку M', принадлежащую той же области D. Такое преобразование обозначается одной буквой, например T, и записывается

$$M' = TM.$$

Пример. Движение образует преобразование евклидова пространства в себя.

Предположим, что когда точка M будет пробегать последовательно все точки области D, каждую один и только один раз, соответствующая ей точка M' также будет последовательно пробегать все точки области D, один и только один раз каждую. Преобразование, которое тогда сопоставляет каждой точке M' области D единственную соответствующую

точку M, называется *преобразованием, обратным преобразованию* T; оно обозначается символом T^{-1} и записывается

$$T^{-1}M' = M.$$

Пример. Всякое движение допускает обратное, которое тоже будет движением.

В последующем мы будем рассматривать исключительно преобразования, обладающие обратными.

Пусть два преобразования T и T' действуют в одной и той же области D. Рассмотрим точку $M'=TM$, затем точку $M''=T'M'$ и, наконец, преобразование, которое ставит в соответствие точке M точку $M'' : M''=T'(TM)$. Назовем это преобразование *произведением преобразования* T *на преобразование* T'; оно обозначается символом $T'T$.

Вообще два произведения TT' и $T'T$ образуют разные преобразования. Если $TT'=T'T$, то говорят, что преобразования T и T' *перестановочны.*

Примеры. Произведение двух движений будет движением. Произведение двух параллельных переносов T и T' будет параллельным переносом, при этом $TT'=T'T$: два произвольных параллельных переноса перестановочны. Произведение двух вращений, вообще говоря, не будет вращением. Вообще два вращения не перестановочны.

По определению имеем:

$$T''(T'T)M = T''[T'(TM)] \text{ и } (T''T')TM = T''[T'(TM)].$$

Следовательно,

$$T''(T'T) = (T''T')T.$$

Этот факт выражают словами, говоря, что произведение преобразований *ассоциативно.* Произведение произвольного числа преобразований вполне определено этими преобразованиями и порядком, в котором выполняется их перемножение.

Преобразование, обратное произведению преобразований. Пусть два преобразования T и T' действуют в одной области D и каждое допускает обратное преобразование; я утверждаю, что $(TT')^{-1}$ существует и что

$$(TT')^{-1} = T'^{-1}T^{-1}.$$

Действительно, соотношение

$$TT'M = M'$$

эквивалентно соотношению

$$T'M = T^{-1}M'$$

и, следовательно, соотношению

$$M = T'^{-1}T^{-1}M'.$$

Точно так же произведение некоторого числа преобразований, обладающих обратными, имеет в качестве обратного произведение обратных преобразований, выполненное в противоположном порядке:

$$(T_1T_2\ldots T_{\alpha-1}T_\alpha)^{-1} = T_\alpha^{-1}T_{\alpha-1}^{-1}\ldots T_2^{-1}T_1^{-1}.$$

Тождественное преобразование — это такое преобразование, которое каждой точке области D сопоставляет эту же самую точку. Оно обозначается символом I. Очевидно,

$$IT = T,\ TI = T,\ TT^{-1} = I,\ T^{-1}T = I.$$

59. Группы. *Определение.* Группа преобразований есть множество преобразований, которые действуют в одной и той же области и обладают следующими двумя свойствами:

1°. Преобразование, обратное каждому преобразованию группы, существует и принадлежит группе.

2°. Произведение двух каких-нибудь преобразований группы принадлежит группе.

Замечание. Пусть S — одно из преобразований группы; эта группа содержит обратное преобразование S^{-1} и, следовательно, произведение $SS^{-1}=I$. Всякая группа содержит, следовательно, тождественное преобразование.

Примеры. Совокупность вращений в пространстве не образует группы, а множество параллельных переносов образует группу. Движения также образуют группу.

Подгруппой заданной группы называют всякое подмножество преобразований этой группы, которое само образует группу.

Укажем различные подгруппы движений: движения, оставляющие неподвижной заданную точку; движения, оставляющие инвариантными каждую из двух данных точек в отдельности; движения, составляющие инвариантным множество двух заданных точек; движения, оставляющие неподвижной данную прямую; движения, оставляющие инвариантной данную ориентированную прямую; движения, оставляющие неподвижной точку некоторой кривой и преобразующие эту кривую в новую кривую, имеющую с исходной касание порядка p: это движения, которые переводят некоторый триэдр порядка p рассматриваемой точки во все остальные.

Как только мы сформулируем первую основную теорему теории групп (п. 78, стр. 181), все семейства преобразований,

которые мы будем рассматривать, будут исключительно группами.

60. Пространство параметров. Рассмотрим какое-нибудь семейство преобразований. Всегда можно установить непрерывное и взаимно однозначное соответствие между преобразованиями этого семейства и точками надлежащим образом выбранного представляющего пространства. Это представляющее пространство называется *пространством параметров*.

Если это пространство непрерывно, то семейство называется *непрерывным*.

Примеры. Движения трехмерного пространства, оставляющие неподвижной заданную прямую, образуют группу, которая не будет непрерывной. Перемещения и произведения перемещений с симметриями образуют группу, которая не будет непрерывной.

Когда пространство параметров непрерывно и имеет конечное число измерений, то семейство называется *непрерывным и конечным*.

Пример. Движения трехмерного пространства образуют непрерывную и конечную группу, число измерений ее $r=6$.

В этом случае координаты $q_1, \ldots, q_r$ точки a пространства параметров будут называться *параметрами* преобразования S_a, которое соответствует этой точке; r будет называться «числом параметров», или «порядком» группы. Если тождественное преобразование принадлежит семейству, то мы будем ставить ему в соответствие параметры $0, \ldots, 0$.

Преобразования конечного и непрерывного семейства задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \varphi_n(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Значения переменных x_i и параметров a_k могут быть действительными или комплексными. Мы будем всегда предполагать, что функции φ_i аналитические относительно их $n+r$ аргументов.

Отметим, что вообще

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0, \tag{2}$$

когда преобразования семейства обладают обратными: действительно, тогда должно быть возможно разрешить систему (1) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при заданных $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

61. Преобразование системы отнесения. Формулы (1) предполагают определенной систему отнесения R_0 в области D, которую описывает точка M с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Определить в области D систему отнесения R — значит присоединить к каждой точке области D такую систему координат, чтобы двум различным точкам области D соответствовали две различные системы координат.

Пусть T — преобразование области D в себя, которое допускает обратное преобразование T^{-1}. По определению, *преобразовать систему отнесения R преобразованием T* — значит присоединить к точке TM координаты, которые имела точка M в системе R. Две различные точки области D получаются посредством преобразования T из двух различных точек области D; поэтому к ним присоединяют две различные системы координат. Следовательно, получается новая система отнесения. Ее обозначают посредством TR.

Замечание. Координатами точки M' относительно TR будут координаты точки $T^{-1}M'$ относительно R.

Пример. Преобразовать с помощью перемещения систему декартовых координат — значит подвергнуть триэдр отнесения этому перемещению.

Из данного определения немедленно вытекают следующие следствия:

a. Пусть в одной и той же области определены две системы отнесения; тогда существует самое большее одно преобразование, которое преобразует первую систему отнесения во вторую.

b. Пусть даны две системы отнесения R и R'; если $R'=TR$, то $R=T^{-1}R'$.

c. Имеем $T'(TR)=(T'T)R$.

d. Пусть даны две фигуры F и F', между точками которых существует взаимно однозначное соответствие; предположим, что это соответствие такое, что всякая точка фигуры F имеет по отношению к некоторой системе отнесения R те же координаты, что и соответствующая ей точка фигуры F', отнесенной ко второй системе отнесения R'; если $R'=TR$, то $F'=TF$.

62. Уравнения преобразования в относительных координатах. Пусть дана область D, в которой определена система

отнесения R_0. Пусть S и T — два преобразования области D в себя, определенные следующими уравнениями:

$$S: \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

$$T: \qquad x'_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Мы предполагаем, что преобразование S обладает обратным. Будем называть R_0 *«абсолютной системой отнесения»*, а SR_0 — *«относительной системой отнесения»*. Мы ставим себе целью определить уравнения преобразования T, отнесенного к этой относительной системе отнесения.

Рассмотрим точку M области D и ее преобразование TM. Относительными координатами точки M будут абсолютные координаты точки $S^{-1}M$; относительными координатами точки TM являются абсолютные координаты точки

$$S^{-1}TM = (S^{-1}TS)\, S^{-1}M.$$

Чтобы выразить яснее этот результат, назовем *аналитическим преобразованием T* преобразование T, рассматриваемое как распространяющееся не на геометрическую точку, а на ее n координат. Наоборот, будем называть *геометрическим преобразованием T* точечное преобразование, которое определяют уравнения преобразования T, когда x_i, x'_i представляют там абсолютные координаты. Полученное заключение можно теперь сформулировать следующим образом:

Геометрическое преобразование T, отнесенное к системе отнесения SR_0, представляется аналитическим преобразованием $S^{-1}T\ S$.

Это преобразование $S^{-1}TS$ является тем самым преобразованием, которое преобразует x_i в x'_i, определяемые посредством n уравнений

$$\varphi_i(x'_1, \ldots, x'_n) = \psi_i[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)]. \qquad (3)$$

Преобразование, сопряженное к одному преобразованию с помощью другого. Если S и T — два преобразования, которые действуют в одной и той же области и первое из которых имеет обратное, то STS^{-1} называется *«преобразованием, сопряженным к T с помощью S»*.

Это определение позволит нам выразиться следующим образом: когда репер R_0 преобразуется преобразованием S, аналитическое преобразование T, которое соответствует данному геометрическому преобразованию, переходит в преобразование, сопряженное к T с помощью S^{-1}.

Отметим два свойства сопряженных преобразований:

a. Произведение сопряженных к T_1 и T_2 с помощью S преобразований будет преобразованием, сопряженным к произведению T_1T_2 с помощью S:

$$(ST_1S^{-1})(ST_2S^{-1}) = S(T_1T_2)S^{-1}.$$

b. Преобразование, сопряженное с помощью S_1 к преобразованию, сопряженному к T с помощью S_2 есть преобразование, сопряженное к T с помощью произведения S_1S_2:

$$S_1(S_2TS_2^{-1})S_1^{-1} = (S_1S_2)T(S_1S_2)^{-1}.$$

63. Подвижной репер семейства преобразований. В первой части курса нам было удобно пользоваться подвижной системой отнесения, которая получается из абсолютной системы отнесения с помощью произвольного перемещения. Будем изучать конечное и непрерывное семейства преобразований S_a, каждое из которых обладает обратным и которые действуют в одной и той же области D; пусть R_0 — абсолютный репер области D. Мы хотим также ввести в рассмотрение семейство систем отнесения

$$R_a = S_aR_0.$$

В геометрии обычно декартова система отнесения представляется трехгранником с пронумерованными ребрами; в предыдущих главах мы ее представляли тремя векторами с общим началом; с тем же успехом мы могли бы характеризовать каждую декартову систему положением эллипсоида с длинами осей 1, 2, 3 и т. д.

Возьмем в области D также фигуру F_0 и присоединим к системе отнесения $R_a = S_aR_0$ фигуру S_aF_0. Мы сделаем таким образом, чтобы двум различным системам отнесения $R_a = S_aR_0$ и $R_b = S_bR_0$ соответствовали две разные фигуры S_aF_0 и S_bF_0: для этого фигура F_0 должна отличаться от всех фигур $S_a^{-1}S_bF_0$.

Можно было бы, например, образовать F_0 из конечного числа точек $A_1, A_2, \ldots, A_p$: для этого за A_1 надо было бы взять точку, которая не остается неподвижной при всех преобразованиях $S_a^{-1}S_b$; пусть Σ_1 — те из преобразований $S_a^{-1}S_b$, которые оставляют A_1 неподвижной; за A_2 надо взять точку, которая не остается неподвижной при всех преобразованиях Σ_1; пусть Σ_2 — те из преобразований $S_a^{-1}S_b$, которые оставляют неподвижными A_1 и A_2; в качестве A_3 надо взять точку, не остающуюся неподвижной при всех преобразованиях Σ_2; ...; в качестве последней

точки A_p следует выбрать такую точку, что Σ_{p+1} сводится к тождественному преобразованию.

Выбрав такую фигуру F_0, отличную от всех своих преобразований $S_a^{-1}S_bF_0$, мы назовем *репером*, присоединенным к R_a, фигуру S_aF_0. Вместо того чтобы говорить о системе отнесения, мы будем говорить с этих пор о соответствующем репере: мы найдем преимущество в использовании этого более конкретного понятия.

Подвижной репер группы. Предположим, что преобразования S_a образуют группу. Условие, что фигура F_0 должна отличаться от всех фигур $S_a^{-1}S_bF_0$, сводится тогда к следующему: фигура F_0 не должна быть инвариантной ни для одного преобразования группы, кроме тождественного.

Поскольку $R_a = S_aS_b^{-1}R_b$, все положения подвижного репера получаются из какого-нибудь одного из них приложением к нему всех преобразований группы.

Группа, отнесенная к R_0, есть совокупность аналитических преобразований S_a; если же ее отнести к R_b, то она будет множеством аналитических преобразований $S_b^{-1}S_aS_b$. Но можно выбрать S_a так, чтобы $S_b^{-1}S_aS_b$ было произвольным преобразованием группы S_α: для этого надо взять $S_a = S_bS_\alpha S_b^{-1}$. Следовательно, множество преобразований группы определяется в абсолютных и относительных координатах одними и теми же уравнениями.

Абсолютный репер R_0 есть некоторое положение подвижного репера, которое ничем не отличается от других его положений.

Укажем теперь реперы, которые обычно используются при изучении наиболее элементарных групп.

64. Подвижной репер группы линейных подстановок. Линейные подстановки

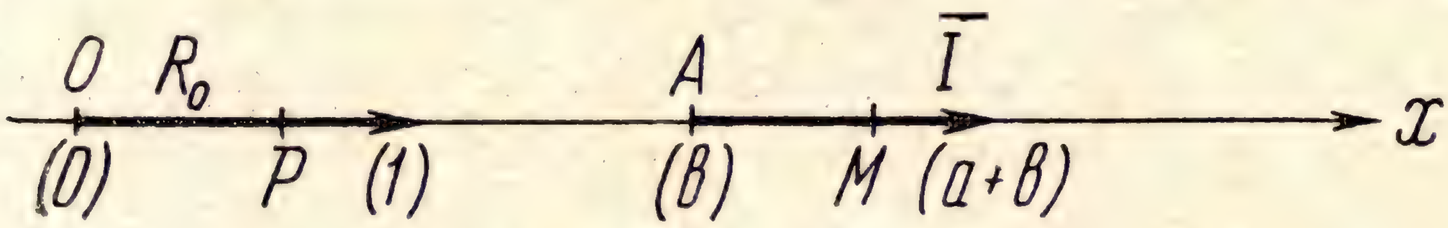
$$x' = ax + b \qquad (a > 0)$$

образуют непрерывную группу с одним переменным и двумя параметрами.

Тождественное преобразование ($a=1$, $b=0$) — единственное преобразование, которое оставляет инвариантными две произвольно выбранные точки, например точки с абсциссами 0 и 1.

Это и есть те две занумерованные точки, или, проще, вектор, имеющий началом первую точку, концом — вторую, которые мы выбираем за репер R_0. Преобразуем R_0 подста-

новкой $x' = ax + b$; мы получим вектор **I**, который имеет началом точку A с абсциссой b, а концом точку с абсциссой $a+b$; длина этого вектора **I** равна a. Множество наших реперов, следовательно, будет множеством векторов, ориентированных так же, как ось координат x. Пусть M — некоторая точка оси. Какова будет ее абсцисса X относительно репера **I**?



Фиг. 3

Мы должны рассмотреть преобразование группы, которое преобразует этот репер в репер R_0. Оно умножает длины всех отрезков на $\frac{1}{a}$; оно преобразует точку A в точку O, точку M — в точку P (фиг. 3). Мы имеем $X = OP$; $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AM}$; следовательно, X определяется соотношением $\overrightarrow{AM} = X\mathbf{I}$.

65. Подвижной репер аффинной группы. Пусть точка плоскости представлена своими двумя декартовыми координатами x и y; аффинной группой называют конечную, непрерывную группу, определяемую уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c', \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} > 0 \right\} \tag{4}$$

Это преобразование (4) ставит в соответствие точкам одной прямой точки, лежащие на прямой, параллельным прямым — параллельные прямые, векторам $\mathbf{V}_i$, удовлетворяющим линейному однородному соотношению

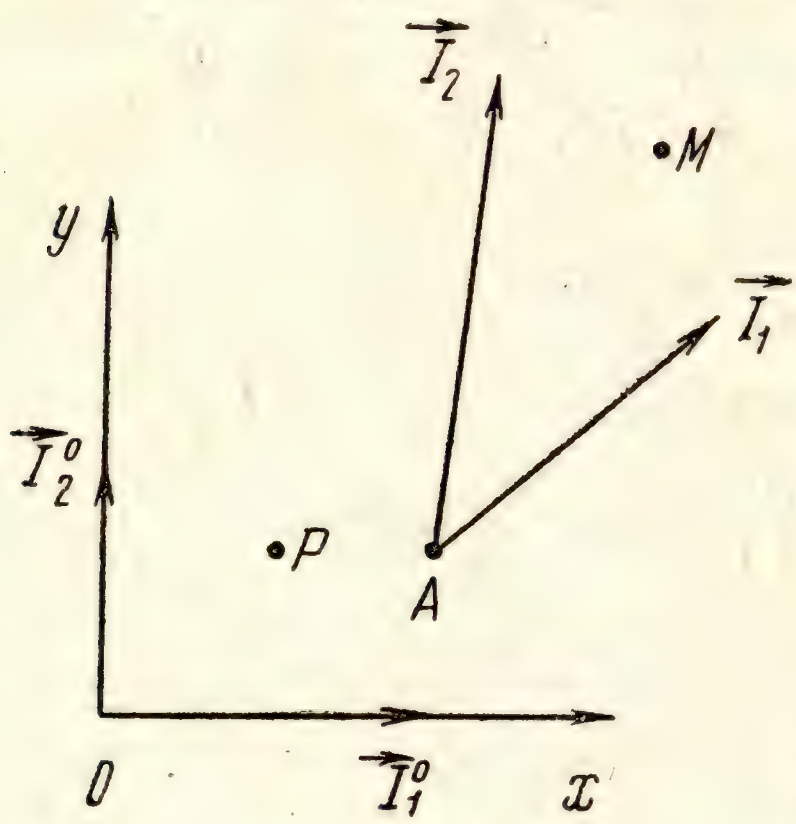
$$\sum_{(i)} x_i \vec{\mathbf{V}}_i = 0$$

векторы $\mathbf{V}'_i$, удовлетворяющие такому же соотношению

$$\sum_{(i)} x_i \mathbf{V}'_i = 0.$$

Только тождественное преобразование оставляет отдельно инвариантными начало O, точку $(0, 1)$ и точку $(1, 0)$. Следовательно, мы можем выбрать в качестве репера R_0 фигуру,

образованную двумя векторами $\mathbf{I}_1^0$, $\mathbf{I}_2^0$, имеющими точку O общим началом и концами первый — точку (0, 1), второй — точку (1, 0). Эти векторы после преобразования, определяемого формулами (4), переходят в два вектора $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, имеющих началом точку $A(c, c')$ и компонентами первый (a, a'), второй (b, b') (фиг. 4). Определим относительные координаты X и Y точки M плоскости. Преобразование, которое переводит векторы $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ в векторы $\mathbf{I}_1^0$, $\mathbf{I}_2^0$, преобразует точку M в точку P, абсолютными координатами которой будут X и Y. Эти координаты определяются посредством соотношения



Фиг. 4

$$\overrightarrow{OP} = X\mathbf{I}_1^0 + Y\mathbf{I}_2^0.$$

Следовательно, X и Y будут двумя числами, которые удовлетворяют соотношению

$$\overrightarrow{AM} = X\mathbf{I}_1 + Y\mathbf{I}_2.$$

Аналогичные рассуждения пригодны и для аффинной группы n измерений.

66. Подвижной репер проективной группы (первое определение). Пусть точка плоскости представляется тремя однородными координатами x, y, z; проективная группа будет группой, которая определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c', \\ z' &= a''x + b''y + c'', \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0. \right\} \tag{5}$$

Эта группа конечна и непрерывна; в действительности она содержит две переменные и зависит от восьми параметров. Она преобразует точки, принадлежащие прямой, в точки прямой, прямые — в прямые и сохраняет ангармоническое отношение. Определим, какие преобразования оставляют инвариантными точки $\alpha_0(1, 0, 0)$, $\beta_0(0, 1, 0)$, $\gamma_0(0, 0, 1)$, $\delta_0(1, 1, 1)$; мы найдем, что такие преобразования определяются уравнениями $x' = ax$, $y' = ay$, $z' = az$; все такие преобразования эквивалентны тождественному преобразованию. Мы можем, следовательно, принять за репер R_0 фигуру, образованную четырьмя предыдущими точками, перенумерованными в указанном порядке. Репер R_0 преобразуется посредством преобразования (5) в фигуру, образованную точками $\alpha(a, a', a'')$, $\beta(b, b', b'')$, $\gamma(c, c', c'')$, $\delta(a+b+c, a'+b'+c', a''+b''+c'')$, т. е. в фигуру,

образованную четырьмя произвольными точками, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Определим относительные однородные координаты X, Y, Z какой-нибудь точки M плоскости. Преобразование, которое переводит R в R_0, преобразует точку M в точку P. Абсолютными координатами * этой точки служат числа:

$$X = (\beta_0\alpha_0,\ \beta_0\gamma_0,\ \beta_0\delta_0,\ \beta_0 P),$$
$$Y = (\alpha_0\beta_0,\ \alpha_0\gamma_0,\ \alpha_0\delta_0,\ \alpha_0 P),$$
$$Z = 1.$$

Относительными координатами точки M будут, следовательно, числа:

$$X = (\beta\alpha,\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ \beta M);\quad Y = (\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \alpha M);\quad Z = 1.$$

Аналогичные рассуждения приложимы к проективной группе n измерений.

67. Подвижной репер проективной группы (второе определение). Преобразования проективной группы с этого момента будут определяться не подстановками (5), а следующими подстановками, которые, впрочем, сами также образуют группу подстановок:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= a'x + b'y + c'z, \\ z' &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1.\right\} \tag{6}$$

Заданному геометрическому преобразованию соответствуют теперь вполне определенные коэффициенты $a, b, c, \ldots, c''$.

Будем говорить, что задание трех чисел (x, y, z) определяет *аналитическую точку*, совпадающую с *геометрической точкой*, имеющей те же координаты. Образом аналитической точки (x, y, z) при преобразовании T группы, которому соответствуют формулы (6), будет аналитическая точка $\mathbf{M}'(x', y', z')$. Отметим, что $T(T'\mathbf{M}) = (TT')\mathbf{M}$. Пусть даны p аналитических точек

$$\mathbf{M}_1(x_1, y_1, z_1),\quad \mathbf{M}_2(x_2, y_2\ z_2),\ \ldots, \mathbf{M}_p(x_p, y_p, z_p);$$

предположим, что их координаты удовлетворяют трем соотношениям:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = 0,$$
$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_py_p = 0,$$
$$a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_pz_p = 0;$$

---

* Через (D_1, D_2, D_3, D_4), как обычно, мы обозначаем ангармоническое отношение четырех сходящихся в одной точке прямых D_1, D_2, D_3, D_4.

условимся записывать это в виде

$$a_1\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{M}_2 + \ldots + a_p\mathbf{M}_p = 0;$$

пусть $\mathbf{M}_1', \ldots, \mathbf{M}_p'$ — образы этих точек при преобразовании группы, тогда

$$a_1\mathbf{M}_1' + a_2\mathbf{M}_2' + \ldots + a_p\mathbf{M}_p' = 0.$$

Будем обозначать символом $[\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3]$ значение определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

из правила умножения определителей следует соотношение

$$[\mathbf{M}_1', \quad \mathbf{M}_2', \quad \mathbf{M}_3'] = [\mathbf{M}_1, \ \mathbf{M}_2, \ \mathbf{M}_3].$$

Только тождественное преобразование оставляет инвариантной каждую из аналитических точек

$$\mathbf{A}^0(0, \ 0, \ 1), \quad \mathbf{A}_1^0(1, \ 0, \ 0), \quad \mathbf{A}_2^0(0, \ 1, \ 0).$$

Репер R_0, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, будет образован этими аналитическими точками. Преобразование (6) преобразует репер R_0 в репер R, образованный тремя аналитическими точками:

$$\mathbf{A}(c, \ c', \ c''), \quad \mathbf{A}_1(a, \ a', \ a''), \ \mathbf{A}_2(b, \ b', \ b'').$$

Обратно, три аналитические точки $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, такие, что

$$[\mathbf{A}, \ \mathbf{A}_1, \ \mathbf{A}_2] = 1,$$

образуют репер R.

Пусть дана какая-нибудь точка плоскости. Определим ее координаты X, Y, Z относительно репера R (они определяются с точностью до множителя). Этими координатами будут координаты произвольной аналитической точки $\mathbf{M}$, соответствующей заданной геометрической точке. Преобразование, которое переводит R в R_0, преобразует точку $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{P}$ с абсолютными координатами X, Y, Z. Эти координаты определяются соотношением

$$\mathbf{P} = X\mathbf{A}_1^0 + Y\mathbf{A}_2^0 + Z\mathbf{A}^0.$$

Следовательно, относительные координаты точки $\mathbf{M}$ определяются соотношением

$$\mathbf{M} = X\mathbf{A}_1 + Y\mathbf{A}_2 + Z\mathbf{A}.$$

II. КОМПОНЕНТЫ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

Дифференциальное исчисление прилагается к теории групп с помощью двух понятий, которые мы сейчас введем: это понятия инфинитезимальных преобразований и компонент инфинитезимального смещения подвижного репера.

68. Инфинитезимальные преобразования. Рассмотрим преобразование T_ε, которое зависит от бесконечно малого параметра ε и которое очень близко к тождественному преобразованию. Предположим, что преобразование T_ε определяется уравнениями

$$x'_i = x_i + \varepsilon\eta_i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots, \tag{7}$$

где точками обозначены члены, порядок малости которых выше, чем ε.

Уравнение (7) означает, что при переходе от точки к ее образу координата x_i получает приращение, главная часть которого равна

$$\delta x_i = \varepsilon\eta_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получает в таких же условиях приращение $f(x'_1, \ldots, x'_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$, главная часть которого равна

$$\delta f = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Эта формула (8) охватывает n формул (7); рассмотрение вариации δf имеет то преимущество, что не дает возможности играть кажущуюся роль выбору координат.

Инфинитезимальным преобразованием называют всякий оператор, который присоединяет к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцию

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Инфинитезимальное преобразование, следовательно, есть линейный однородный оператор. Всякая линейная и однородная комбинация инфинитезимальных преобразований есть инфинитезимальное преобразование.

По определению, мы присоединяем к *бесконечно малому преобразованию* T_ε, которое определяется уравнениями (7), *инфинитезимальное преобразование,* которое определяется (8); выражение δf будет называться *символом* этого бесконечно малого преобразования и этого инфинитезимального преобразования.

Пример. Рассмотрим бесконечно малое перемещение, полученное в результате последовательного выполнения трех переносов параллельно осям координат соответственно на расстояния ε_1, ε_2, ε_3, а затем трех вращений вокруг осей координат соответственно на углы ε_{23}, ε_{31}, ε_{12}. В результате этого бесконечно малого перемещения координаты x, y, z получат приращения, главные части которых равны

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon_1 \qquad\qquad - \varepsilon_{12} y + \varepsilon_{31} z, \\ \delta y &= \varepsilon_2 + \varepsilon_{12} x \qquad\qquad - \varepsilon_{23} z, \\ \delta z &= \varepsilon_3 - \varepsilon_{31} x + \varepsilon_{23} y. \end{aligned}$$

Этому бесконечно малому перемещению соответствует, следовательно, инфинитезимальное преобразование

$$Xf = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon_{23}\left(y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \\ + \varepsilon_{31}\left(z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \varepsilon_{12}\left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Преобразования, символы которых

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

называются *единичными инфинитезимальными переносами,* параллельными осям Ox, Oy, Oz; преобразования, символы которых

$$X_{23} f = y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_{31} f = z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_{12} f = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x},$$

называются *единичными инфинитезимальными вращениями* вокруг осей Ox, Oy, Oz.

69. Уравнения инфинитезимальных преобразований в относительных координатах. Мы будем различать геометрические и аналитические преобразования (п. 62, стр. 158). Бесконечно малое преобразование и соответствующее инфинитезимальное преобразование будем называть аналогично геометрическими и аналитическими.

Пусть дана область D, в которой определена система отнесения R_0; пусть преобразование S, обладающее обратным, преобразует область D в себя:

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{S}$$

Пусть дано геометрическое инфинитезимальное преобразование; если его отнести к реперу R_0, то оно имеет символ

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Найдем, каким будет его символ, если его отнести к системе отнесения SR_0.

Для этого рассмотрим величины η_i как бесконечно малые. Бесконечно малому преобразованию $S^{-1}TS$ соответствует инфинитезимальное преобразование, символ которого

$$Yf = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{9}$$

в силу п. **62** (стр. 158), будет искомым символом.

Чтобы определить функции ζ_k, достаточно заменить в формуле (3) п. **62** переменные x_k' на $x_k + \zeta_k$ и $\psi_k(y_1, \ldots, y_n)$ на

$$y_k + \eta_k(y_1, \ldots, y_n),$$

а затем опустить бесконечно малые выше первого порядка. Тогда получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \zeta_k = \eta_i[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)]. \tag{10}$$

Определитель, составленный из величин $\dfrac{d\varphi_i}{dx_k}$, в силу неравенства (2) (стр. 156), отличен от нуля. Систему (10) можно разрешить относительно ζ_k; полученные величины надо внести в (9); таким образом, получается символ искомого инфинитезимального преобразования $S^{-1}TS$, которое было названо *сопряженным* к T с помощью S^{-1}.

Пример. Если T — инфинитезимальный перенос

$$Xf = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

а S — вращение

$$x' = x\cos c - y\sin c,$$
$$y' = x\sin c + y\cos c,$$

то сопряженное к T с помощью S преобразование будет инфинитезимальным переносом

$$Yf = (\varepsilon_1\cos c + \varepsilon_2\sin c)\frac{\partial f}{\partial x} + (-\varepsilon_1\sin c + \varepsilon_2\cos c)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

70. Относительные компоненты подвижного репера. Рассмотрим подвижной репер семейства преобразований. Пусть R_a и R_{a+da} — два бесконечно близких положения этого репера. Геометрическим преобразованием, которое переводит R_a в R_{a+da}, будет геометрическое преобразование $S_{a+da}S_a^{-1}$; отнесенное к реперу R_a, оно образует, в силу п. **62**, аналитическое* преобразование $S_a^{-1}(S_{a+da}S_a^{-1})S_a = S_a^{-1}S_{a+da}$.

Напомним, какие представляются обстоятельства, когда S_a будет группой движений, а R_a — подвижным триортогональным триэдром. Инфинитезимальное преобразование $S_a^{-1}\,S_{a+da}$ будет инфинитезимальным движением. Его символ, следовательно, будет типа

$$\omega_1(a, da)X_1f + \omega_2(a, da)X_2f + \omega_3(a, da)X_3f +$$
$$+ \omega_{23}(a, da)X_{23}f + \omega_{31}(a, da)X_{31}f + \omega_{12}(a, da)X_{12}f, \quad (11)$$

где X_1f, X_2f, X_3f — единичные инфинитезимальные переносы, параллельные осям координат; $X_{23}f$, $X_{31}f$, $X_{12}f$ — единичные инфинитезимальные вращения вокруг осей координат (ср. п. **68**, пример стр. 166). ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} — шесть пфаффовых форм от шести параметров $a_1, \ldots, a_6$; это — шесть относительных компонент инфинитезимального перемещения триэдра. Напомним, что они линейно независимы.

Определение. *Будем говорить, что подвижной репер R_a обладает относительными компонентами, если символ инфинитезимального преобразования $S_a^{-1}S_{a+da}$ будет типа*

$$\omega_1(a, da)X_1f + \ldots + \omega_r(a, da)X_rf, \quad (12)$$

---

* Равным образом можно рассуждать так: геометрическое преобразование, переводящее R_a в R_{a+da} и отнесенное к R_a, имеет те же уравнения, что и преобразование, переводящее R_0 в $S_a^{-1}\,R_{a+da} = S_a^{-1}\,S_{a+da}\,R_0$; оно образует аналитическое преобразование $S_a^{-1}\,S_{a+da}$.

и при этом имеют место следующие обстоятельства: инфинитезимальные преобразования $X_1 f, \ldots, X_r f$ не зависят ни от параметров $a_1, \ldots, a_r$, ни от их дифференциалов; $\omega_1(a, da), \ldots$ $\ldots, \omega_r(a, da)$ — r форм Пфаффа от r параметров, от которых зависит R_a; в произвольной точке пространства параметров эти формы вообще независимы.

Мы будем называть тогда $\omega_1, \ldots, \omega_r$ «относительными компонентами» репера R_a.

Замечание относительно независимости форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Предположим, что символ $S_a^{-1} \; S_{a+da}$ будет вида (12), но формы $\omega_1(a, da), \ldots, \omega_r(a, da)$ не будут независимыми ни при каком значении параметров $a_1, \ldots, a_r$. В этом случае можно приложить рассуждения, уже применявшиеся в пп. 8 и 25 (стр. 94 и 113): можно найти такую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{da_1}{\chi_1(a_1, \ldots, a_r)} = \frac{da_2}{\chi_2(a_1, \ldots, a_r)} = \ldots = \frac{da_r}{\chi_r(a_1, \ldots, a_r)},$$

что все формы $\omega_s(a, da)$ будут равны нулю, когда величины $a_1, \ldots, a_r$ меняются, удовлетворяя этим дифференциальным уравнениям; $S_a^{-1} \; S_{a+da}$ тогда все время будет тождественным преобразованием; преобразование S_a остается фиксированным. Таким образом, всякое преобразование семейства совпадает с непрерывным множеством других преобразований семейства; преобразования S_a в действительности будут зависеть от меньшего, чем r, числа параметров.

Нет надобности проверять, что формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ вообще линейно независимы, если известно, что используемый репер не может зависеть менее чем от r параметров.

71. Правило подсчета относительных компонент. Пусть дано семейство преобразований S_a, обладающих обратными:

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; \; a_1, \ldots, a_r).$$

Выясним, обладает ли подвижной репер относительными компонентами, и определим эти компоненты.

Пусть точка M обладает абсолютными компонентами $x_1, \ldots, x_n$; пусть

$$x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n$$

— абсолютные координаты точки $P = S_a^{-1} S_{a+da} M$. Имеем

$$S_a P = S_{a+da} M;$$

следовательно,

$$\varphi_i(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n;\ a_1, \ldots, a_r) =$$
$$= \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1 + da_1, \ldots, a_r + da_r),$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_k} \delta x_k = \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p} da_p. \quad (13)$$

В силу неравенства (2) (стр. 156), эти уравнения могут быть разрешены относительно δx_k. Символ инфинитезимального преобразования $S_a^{-1} S_{a+da}$ получится, если получаемые таким образом значения δx_k внести в соотношения

$$\delta f = \sum_{k=1}^{n} \delta x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (14)$$

Чтобы существовали относительные компоненты, необходимо и достаточно, чтобы δf было типа (12).

Пример. Рассмотрим семейство действительных преобразований, каждое из которых обладает обратным:

$$x' = ax^3 + b \qquad (a > 0).$$

Уравнения (13) и (14) принимают вид:

$$3ax^2 \delta x = da \cdot x^3 + db, \quad \delta f = \frac{da}{a} \frac{x}{3} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{db}{a} \frac{1}{3x^2} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подвижной репер этого семейства обладает, следовательно, относительными компонентами

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{a}.$$

Отметим, что это семейство не будет группой.

Пример. Группа линейных подстановок

$$x' = ax + b \qquad (a > 0).$$

Соотношения (13) и (14) принимают вид:

$$a\,\delta x = x\,da + db, \quad \delta f = \frac{da}{a} x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{db}{a} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Репер группы обладает, следовательно, относительными компонентами

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{a}.$$

Эти формулы могут быть также получены из геометрических соображений: рассмотрим точку M, абсцисса которой по отношению к реперу R_a равна x, и точку P, абсцисса которой равна x по отношению к реперу R_{a+da}; $x+\delta x$ будет абсциссой точки P по отношению к R_a. Следовательно (ср. п. **64**, стр. 161), мы получаем

$$\delta x = \frac{MP}{a},$$

но, в силу п. **64**,

$$MP = AM\frac{da}{a} + db.$$

С другой стороны,

$$x = \frac{AM}{a},$$

откуда

$$\delta x = x\frac{da}{a} + \frac{db}{a}.$$

Относительные компоненты репера группы. Рассмотрим конечную, непрерывную группу преобразований S_a, зависящую точно от r параметров. Бесконечно малое преобразование S_{da} этой группы имеет символ типа

$$da_1X_1f + \ldots da_rX_rf,$$

или вообще типа

$$\varepsilon_1X_1f + \ldots + \varepsilon_rX_rf,$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — линейные однородные комбинации с постоянными коэффициентами из $da_1, \ldots, da_r$.

Мы будем говорить, что $X_1f, \ldots, X_rf$ представляют собой r *инфинитезимальных преобразований базиса этой группы*; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ будут называться компонентами преобразования S_{da}. Все инфинитезимальные преобразования группы будут линейными однородными с постоянными коэффициентами комбинациями из $X_1f, \ldots, X_rf$.

$S_a^{-1}S_{a+da}$ будет бесконечно малым преобразованием группы. Пусть $\omega_1(a, da), \ldots, \omega_r(a, da)$ — его компоненты. Преобразованию $S_a^{-1}S_{a+da}$ соответствует символ

$$\omega_1(a, da)X_1f + \ldots + \omega_r(a, da)X_rf.$$

Следовательно, *подвижной репер группы всегда обладает относительными компонентами.* [Пример: подвижной трехгранник.]

Инфинитезимальные преобразования группы линейно независимы: в противном случае можно было бы предположить

$X_1=0$ и заменить в символе $S_a^{-1}\ S_{a+da}$ форму ω_1 нулем; формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ не были бы независимыми, но это противоречит предположению, что число параметров группы точно равно r (ср. п. **70**, замечание относительно..., стр. 169).

Относительные компоненты $\omega_1(a, da), \ldots, \omega_r(a, da)$ *группы не только вообще независимы, но они независимы в каждой точке* a *пространства параметров;* действительно, им можно дать произвольные значения $db_1, \ldots, db_r$, выбирая $S_{a+da}=S_a\ S_{db}$.

72. Относительные компоненты аффинного репера. Рассмотрим аффинную группу и реперы, определенные в п. **65** (стр. 161).

Укажем прежде всего компоненты инфинитезимального преобразования S_{da} (предполагается, что параметры выбраны так, что тождественное преобразование соответствует нулевым значениям параметров). Репер R_{da} образован точкой A и двумя векторами $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$. Чтобы его охарактеризовать, достаточно задать относительно репера R_0 координаты $\omega_1(0, da)$, $\omega_2(0, da)$ точки A, компоненты $1+\omega_{11}(0, da)$, $\omega_{12}(0, da)$ вектора $\mathbf{I}_1$ и компоненты $\omega_{21}(0, da)$, $1+\omega_{22}(0, da)$ вектора $\mathbf{I}_2$. Линейно независимые формы $\omega_1(0, da)$, $\omega_2(0, da)$, $\omega_{11}(0, da)$, $\omega_{12}(0, da)$, $\omega_{21}(0, da)$, $\omega_{22}(0, da)$, число которых равно числу параметров, будут выбраны в качестве компонент инфинитезимального преобразования S_{da}.

Пусть теперь даны репер R_a, образованный точкой A и векторами $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, и репер R_{a+da}, образованный точкой $\mathbf{A}+d\mathbf{A}$ и векторами $\mathbf{I}_1+d\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_2+d\mathbf{I}_2$. Преобразуем с помощью преобразования S_a^{-1} фигуру, которая образована совокупностью этих двух реперов; тогда получается репер R_0 и репер R', который составляется из точки A' и двух векторов $\mathbf{I}_1'$, $\mathbf{I}_2'$. По определению,

$$\overrightarrow{OA'}=\omega_1(a, da)\,\mathbf{I}_1^0+\omega_2(a, da)\mathbf{I}_2^0,$$

$$\mathbf{I}_1'-\mathbf{I}_1^0=\omega_{11}(a, da)\,\mathbf{I}_1^0+\omega_{12}(a, da)\,\mathbf{I}_2^0,$$

$$\mathbf{I}_2'-\mathbf{I}_2^0=\omega_{21}(a, da)\,\mathbf{I}_1^0+\omega_{22}(a, da)\,\mathbf{I}_2^0.$$

Отсюда следует, в силу уже использованных свойств аффинной группы, что

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A}&=\omega_1(a, da)\,\mathbf{I}_1+\omega_2(a, da)\,\mathbf{I}_2,\\ d\mathbf{I}_1&=\omega_{11}(a, da)\,\mathbf{I}_1+\omega_{12}(a, da)\,\mathbf{I}_2,\\ d\mathbf{I}_2&=\omega_{21}(a, da)\,\mathbf{I}_1+\omega_{22}(a, da)\,\mathbf{I}_2.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Соотношения (15) позволяют очень просто определить относительные компоненты $\omega_1(a, da)$, $\omega_2(a, da)$, $\omega_{11}(a, da)$, $\omega_{12}(a, da)$, $\omega_{21}(a, da)$, $\omega_{22}(a, da)$, если известно относительное положение двух реперов R_a и R_{a+da}.

73. Относительные компоненты проективного репера. Рассмотрим проективную группу и реперы, определенные в п. **67** (стр. 163). Чтобы охарактеризовать репер R_{da}, достаточно задать координаты аналитических точек, которые его определяют:

$$\begin{vmatrix} 1+\omega_{00}(0, da) & \omega_{01}(0, da) & \omega_{02}(0, da) \\ \omega_{10}(0, da) & 1+\omega_{11}(0, da) & \omega_{12}(0, da) \\ \omega_{20}(0, da) & \omega_{21}(0, da) & 1+\omega_{22}(0, da) \end{vmatrix}.$$

Впрочем, определитель, образованный девятью координатами, должен равняться 1, с точностью до величин второго порядка; другими словами, $\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}=0$. Линейно независимые формы $\omega_{00}(0, da)$, $\omega_{01}(0, da)$, $\omega_{02}(0, da)$, $\omega_{10}(0, da)$, $\omega_{11}(0, da)$, $\omega_{12}(0, da)$, $\omega_{20}(0, da)$, $\omega_{21}(0, da)$, число которых равно числу параметров группы, будут выбраны в качестве компонент инфинитезимального преобразования S_{da}.

Пусть теперь дан репер R_a, образованный тремя аналитическими точками $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$; репер R_{a+da} образован точками $\mathbf{A}+d\mathbf{A}, \mathbf{A}_1+d\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2+d\mathbf{A}_2$ Преобразуем посредством S_a^{-1} фигуру, которую образуют эти два репера; мы получим репер R_0 и репер R', образованный точками $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$. По определению:

$$\mathbf{A}'-\mathbf{A}^0=\omega_{00}(a, da)\mathbf{A}^0+\omega_{01}(a, da)\mathbf{A}_1^0+\omega_{02}(a, da)\mathbf{A}_2^0,$$

$$\mathbf{A}_1'-\mathbf{A}_1^0=\omega_{10}(a, da)\mathbf{A}^0+\omega_{11}(a, da)\mathbf{A}_1^0+\omega_{12}(a, da)\mathbf{A}_2^0,$$

$$\mathbf{A}_2'-\mathbf{A}_2^0=\omega_{20}(a, da)\mathbf{A}^0+\omega_{21}(a, da)\mathbf{A}_1^0+\omega_{22}(a, da)\mathbf{A}_2^0.$$

Отсюда, в силу уже использованных свойств проективной группы, следует:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A}&=\omega_{00}(a, da)\mathbf{A}+\omega_{01}(a, da)\mathbf{A}_1+\omega_{02}(a, da)\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_1&=\omega_{10}(a, da)\mathbf{A}+\omega_{11}(a, da)\mathbf{A}_1+\omega_{12}(a, da)\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_2&=\omega_{20}(a, da)\mathbf{A}+\omega_{21}(a, da)\mathbf{A}_1+\omega_{22}(a, da)\mathbf{A}_2. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Соотношения (16) позволяют очень просто определить относительные компоненты $\omega_{ij}(a, da)$, если известны два репера R_a и R_{a+da}. Кроме того, имеем

$$\omega_{00}(a, da)+\omega_{11}(a, da)+\omega_{22}(a, da)=0. \quad (17)$$

74. Абсолютные компоненты подвижного репера. Рассмотрим подвижной репер R_a семейства преобразований S_a.

Преобразование, которое переводит R_a в R_{a+da}, отнесенное к R_0, будет аналитическим преобразованием $S_{a+da}\, S_a^{-1}$.

Определение. *Будем говорить, что R_a обладает абсолютными компонентами, если символ преобразования $S_{a+da}\, S_a^{-1}$ будет типа*

$$\tilde{\omega}_1(a, da) Y_1 f + \ldots + \tilde{\omega}_r(a, da) Y_r f, \tag{18}$$

причем инфинитезимальные преобразования $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ независимы от a и da, формы $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r$ будут формами Пфаффа, которые в произвольной точке пространства параметров вообще независимы.

Эта независимость форм $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r$, впрочем, необходимо имеет место, когда r — наименьшее число параметров, от которых, как функция, зависит репер R_a.

Правило вычислений абсолютных компонент. Предположим, что преобразования S_a определяются уравнениями

$$x_1' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r). \tag{1}$$

Пусть точка M имеет абсолютные координаты $x_1, \ldots, x_n$; пусть $x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n$ — абсолютные координаты точки $P = S_{a+da} S_a^{-1} M$; пусть $y_1, \ldots, y_n$ — абсолютные координаты точки $Q = S_a^{-1} M$. Мы имеем $M = S_a Q$, $P = S_{a+da} Q$; следовательно,

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_r),$$

$$x_i + \delta x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n;\ a_1 + da_1, \ldots, a_r + da_r).$$

Поэтому

$$\delta x_i = \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i(y_1, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p}\, da_p.$$

Инфинитезимальному преобразованию $S_{a+da} S_a^{-1}$, следовательно, соответствует символ

$$\delta f = \sum_{i,p} \frac{\partial \varphi_i(y_1, \ldots, y_p;\ a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} da_p, \tag{19}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — значения, определяемые системой

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_r). \tag{20}$$

Чтобы абсолютные компоненты существовали, необходимо и достаточно, чтобы δf было типа (18).

Пример. Рассмотрим семейство действительных преобразований, каждое из которых обладает обратным преобразованием;

$$x' = ax^3 + b \qquad (a > 0).$$

Уравнения (19) и (20) напишутся

$$\delta f = (y^3\,da + db)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x = ay^3 + b,$$

откуда

$$\delta f = \frac{da}{a}\,x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(db - b\,\frac{da}{a}\right)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подвижной репер этого семейства обладает, следовательно, абсолютными компонентами

$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{da}{a}, \quad \widetilde{\omega}_2 = db - b\,\frac{da}{a}.$$

Пример. Группа линейных подстановок

$$x' = ax + b \qquad (a > 0).$$

Уравнения (19) и (20) запишутся в виде:

$$\delta f = (y\,da + db)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x = ay + b,$$

откуда

$$\delta f = \frac{da}{a}\,x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(db - b\frac{da}{a}\right)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Мы получаем ту же формулу, что и в предыдущем примере.

Эта формула может быть установлена с помощью геометрических рассуждений. Рассмотрим такие две точки M и P, что абсцисса точки M относительно репера R_a равна абсциссе точки P относительно репера R_{a+da}. Пусть x и $x+\delta x$ — их абсолютные абсциссы. Точку P можно получить, если подвергнуть точку M преобразованию гомотетии с центром в начале репера R_a и коэффициентом $\dfrac{a+da}{a}$, а затем переносу на величину db (см. п. **64**, стр. 161). Следовательно,

$$\delta x = \frac{da}{a}(x - b) + db.$$

Преобразование $S_{a+da}S_a^{-1}$ имеет символ

$$\delta f = \frac{da}{a} x \frac{\partial f}{\partial x} + \left(db - b\frac{da}{a}\right)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Абсолютные компоненты подвижного репера группы. Рассмотрим конечную и непрерывную группу преобразований S_a, зависящую от r параметров. Пусть $\tilde{\omega}_1(a, da), \ldots, \tilde{\omega}_r(a, da)$ — компоненты бесконечно малого преобразования $S_{a+da}S_a^{-1}$. Преобразование $S_{a+da}S_a^{-1}$ имеет символ

$$\tilde{\omega}_1(a, da) X_1 f + \ldots + \tilde{\omega}_r(a, da) X_r f.$$

Подвижной репер группы всегда обладает, следовательно, абсолютными компонентами.

Эти абсолютные компоненты независимы в каждой точке пространства параметров; им можно дать произвольные значения $db_1, \ldots, db_r$, выбирая $S_{a+da} = S_{db}S_a$.

75. Соотношения между абсолютными компонентами $\tilde{\omega}_p$ и относительными компонентами ω_p. Рассмотрим конечное и непрерывное семейство преобразований S_a, каждое из которых обладает обратным. Преобразования $\Sigma_a = S_a^{-1}$ сами образуют семейство такой же природы. Имеем:

$$S_a^{-1}S_{a+da} = \Sigma_a \Sigma_{a+da}^{-1}.$$

Но бесконечно малое преобразование $\Sigma_a \quad \Sigma_{a+da}^{-1}$ и преобразование $\Sigma_{a-da} \quad \Sigma_a^{-1}$, которое получается из него заменой a на $a—da$, отличаются только бесконечно малыми второго порядка; следовательно, соответствующие инфинитезимальные преобразования будут тождественны. Иначе говоря,

$$S_a^{-1}S_{a+da} = \Sigma_{a-da}\Sigma_a^{-1} \tag{21}$$

и также

$$S_{a+da}S_a^{-1} = \Sigma_a^{-1}\Sigma_{a-da}. \tag{21'}$$

Относительные компоненты подвижного репера одного из рассматриваемых семейств существуют, следовательно, одновременно с абсолютными компонентами другого семейства; при этом они имеют противоположные значения.

Это предложение позволяет свести изучение абсолютных компонент к изучению относительных компонент: именно в этом смысле оно будет нам полезно в п. **82**.

Предположим, что преобразования S_a образуют группу, мы можем положить $\sum_a = S_a^{-1} = S_\alpha$. Соотношение (21), которое теперь напишем в виде

$$S_a^{-1} S_{a+d\alpha} = S_{\alpha - d\alpha} S_\alpha^{-1}$$

дает нам

$$\omega_p(a, da) = -\tilde{\omega}_p(\alpha, d\alpha). \tag{22}$$

Это соотношение означает, что *относительные компоненты* становятся *абсолютными компонентами, взятыми с обратным знаком,* если выполнить замену параметров, состоящую в присвоении каждому преобразованию параметров, которые имеют обратное к нему преобразование.

Пример. Рассмотрим группу линейных подстановок. Обратным преобразованием для $x' = ax + b$ будет преобразование $x' = \alpha x + \beta$, где

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = -\frac{b}{a}.$$

В силу п. **71** (стр. 170),

$$\omega_1(a, b, da, db) = \frac{da}{a}, \quad \omega_2(a, b, da, db) = \frac{db}{a}.$$

Формулы (22) нам дают:

$$\tilde{\omega}_1(\alpha, \beta, d\alpha, d\beta) = -\frac{da}{a} = \frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$\tilde{\omega}_2(\alpha, \beta, d\alpha, d\beta) = -\frac{db}{a} = \alpha\, d\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = d\beta - \frac{\beta}{\alpha} d\alpha.$$

Этот результат хорошо согласуется с вычислениями п. 74.

III. ТРИ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПОНЕНТ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

76. Основное условие равенства *. *Пусть дан подвижной репер R_a; пусть он порождает два семейства реперов R_u и R_v; предположим, что установлено взаимно однозначное соответствие между реперами R_u и реперами R_v. Чтобы одно и*

* Эта теорема обобщает условия равенства, сформулированные в пп. **7** и **26** (стр. 93 и 114).

то же преобразование T могло бы совместить все соответственные реперы этих семейств, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемое соответствие приводило к равенству относительных компонент ω_p (u, du) и ω_p (v, dv) реперов R_u и R_v.

[Другими словами: если относительно друг друга реперы R_u и R_v постоянно занимают одно и то же положение, то относительные компоненты их инфинитезимальных смещений одни и те же, и обратно.]

Доказательство. Пусть R_0 — абсолютный репер; пусть S_u и S_v — преобразования, которые переводят репер R_0 соответственно в R_u и R_v.

Предположение

$$R_u = TR_v$$

влечет

$$S_u = TS_v,$$

откуда дифференцированием находим

$$S_{u+du} = TS_{v+dv}.$$

Два последних соотношения имеют следствием

$$S_u^{-1} S_{u+du} = S_v^{-1} S_{v+dv}.$$

Следовательно,

$$\omega_p (u, du) = \omega_p (v, dv).$$

Обратно, тождество

$$\omega_p (u, du) = \omega_p (v, dv)$$

имеет следствием тождество

$$S_u^{-1} S_{u+du} = S_v^{-1} S_{v+dv},$$

которое можно записать в виде

$$S_{u+du} S_{v+dv}^{-1} = S_u S_v^{-1}.$$

Это последнее соотношение показывает, что $S_u S_v^{-1}$ — фиксированное преобразование T, и мы имеем

$$R_u = TR_v.$$

77. Теорема структуры. Теперь мы будем обобщать теоремы структуры пп. **7** и **25** (стр. 93 и 113), рассматривая следующую задачу:

Пусть дан подвижной репер R_a, обладающий относительными компонентами. Можно ли перемещать этот подвижной репер как функцию одного параметра t так, чтобы его положением при $t = 0$ был заданный репер R_1 и чтобы относительными компонентами его были заданные формы $\lambda_1(t)\,dt, \ldots$ $\ldots, \lambda_r(t)\,dt$?

Точкой $a(t)$ пространства параметров, которая соответствует искомому реперу, будет точка, которая при $t = 0$ совпадает с образом $a(0)$ репера R_1 и координаты которой удовлетворяют r дифференциальным уравнениям

$$\omega_1(a, da) = \lambda_1(t)\,dt, \ldots, \omega_r(a, da) = \lambda_r(t)\,dt. \qquad (23)$$

Поскольку $\omega_1, \ldots, \omega_r$ линейно независимы, уравнения (23) дают $\frac{da_1}{dt}, \ldots, \frac{da_r}{dt}$ как функции от $a_1, \ldots, a_r$ и t. Интегрирование этой дифференциальной системы представляет, однако, много трудностей; вот один пример их: предположим, что реперы R_a образуют семейство правых триортогональных триэдров, начало которых находится на расстоянии, меньшем 1, от начала абсолютного триэдра; это семейство реперов обладает относительными компонентами; но интегрирование системы (23) не всегда возможно, так как оно может привести к произвольному правому триортогональному триэдру. Интегрирование системы (23) становится возможным только в том случае, если расширить данное семейство до семейства всех правых триортогональных триэдров.

Также вообще, чтобы интегрирование системы (23) было всегда возможно, необходимо, чтобы мы расширили поле определения данного подвижного репера.

Это *расширение* состоит в присоединении к множеству данных положений подвижного репера всех тех реперов, которые получаются преобразованием этих положений некоторое число раз с помощью преобразований, которые переводят один из них в другой. Рассуждения, аналогичные тем, которыми начинается следующий пункт, позволяют доказать, что полученный таким образом подвижной репер зависит от того же числа параметров и все еще обладает относительными компонентами. Эти доказательства длинны и мало поучительны: мы их не будем излагать.

Окончательно, для подвижных реперов, *поле определения которых было таким образом расширено,* имеет место следующая теорема:

Теорема структуры. *Компоненты инфинитезимального смещения подвижного репера не подчинены никаким условиям*

структуры, когда подвижной репер изменяется как функция только одного параметра.

Примечание. Эта теорема прилагается не только к относительным компонентам, но также и к абсолютным компонентам: в силу п. **75** [формула (22)], замена параметров действительно позволяет рассматривать формы $-\widetilde{\omega}_p$ как относительные компоненты репера.

78. Соотношение между группами и подвижными реперами, обладающими относительными компонентами. Рассмотрим непрерывное и конечное семейство преобразований S_a, подвижной репер которого R_a обладает относительными компонентами. Расширим поле определения R_a таким образом, чтобы сформулированная выше теорема структуры была справедлива.

Зададимся тремя положениями R_1, R_2 и R_3 репера R_a. Пусть дан также репер $R(t)$, который принадлежит семейству R_a, зависит от параметра t и совпадает с репером R_1 при $t=0$, а с репером R_2 при $t=1$. Теорема структуры утверждает существование репера $R^*(t)$, который принадлежит семейству R_a, совпадает с репером R_3 при $t=0$ и относительные компоненты которого равны относительным компонентам репера $R(t)$. Пусть R_4 — положение, которое занимает $R^*(t)$, когда $t=1$. Основное условие равенства утверждает, что преобразование, которое переводит R_1 в R_3, преобразует $R(t)$ в $R^*(t)$, следовательно, в частности, оно переводит R_2 в R_4. Это доказывает, что преобразование, которое переводит некоторый репер R_1 семейства R_a в другой репер R_3 того же семейства, преобразует всякий репер R_2 этого семейства в репер R_4, принадлежащий тому же семейству.

Множество преобразований, которые преобразуют реперы R_a друг в друга, образует, следовательно, группу; эта группа составляется из преобразований T_a, которые переводят один частный репер R_1 семейства R_a во множество всех других положений репера R_a:

$$R_a = T_a R_1. \tag{24}$$

Если выбрать R_1 в качестве абсолютного репера, то рассматриваемый подвижной репер становится подвижным репером группы преобразований T_a. Этот подвижной репер, следовательно, обладает равным образом абсолютными компонентами (ср. п. **74**, последний абзац). В силу п. **75**, замена параметров меняет роли абсолютных и относительных компонент; мы можем, следовательно, утверждать обратно, что существование абсолютных компонент влечет за собой су-

ществование относительных компонент. Таким образом, *относительные и абсолютные компоненты существуют одновременно.*

Формула (24) может быть записана в виде

$$T_a = S_a S_1^{-1}.$$

Отсюда получаем следующее предложение: пусть дано семейство преобразований S_a, подвижной репер R_a которого обладает абсолютными (или относительными) компонентами; пусть S_1 — одно произвольно выбранное преобразование из преобразований S_a ; преобразования $S_a S_1^{-1}$ образуют группу, если, по крайней мере, теорема структуры прилагается к реперу R_a без того, чтобы было необходимо расширять его поле определения. В противном случае эти преобразования $S_a S_1^{-1}$ принадлежат конечной и непрерывной группе, а их образы в пространстве параметров этой группы образуют область этого пространства, которая имеет то же число измерений, что и само это пространство: такая совокупность преобразований называется *ядром группы.* Это множество, содержащее тождественное преобразование для $S_a = S_1$, образует внутри группы некоторую окрестность тождественного преобразования.

Пример. Подвижной репер действительных преобразований

$$x' = ax^3 + b \qquad (a > 0; \quad -1 < b < 1)$$

обладает относительными и абсолютными компонентами (ср. пп. **71** и **74**, пример). Выберем за S_1 преобразование $x' = x^3$; $S_a S_1^{-1}$ будет преобразованием

$$x' = ax + b \qquad (a > 0; \quad -1 < b < 1).$$

Эти преобразования образуют ядро группы

$$x' = ax + b \qquad (a > 0).$$

Остановимся на случае, когда семейство S_a содержит тождественное преобразование*: положим $S_1 = I$; формула (24) приводится к виду $T_a = S_a$, а наши заключения принимают следующую форму:

Первая основная теорема теории групп (Софус Ли). *Пусть дано конечное и непрерывное семейство преобразований, каждое из которых обладает обратным. Предположим, что это семейство содержит тождественное преобразование. Чтобы это семейство было ядром группы, необходимо и достаточно, чтобы инфинитезимальное смещение его подвиж-*

* Напомним, что группа необходимо содержит тождественное преобразование.

ного репера обладало относительными компонентами (или чтобы оно обладало абсолютными компонентами).

Эта теорема позволяет практически узнавать, будет ли некоторое семейство преобразований образовывать ядро группы, потому что мы имеем практическое средство выяснить, существуют ли относительные (или абсолютные) компоненты (см. пп. **71** и **74**).

В дальнейшем мы не будем больше рассматривать семейств преобразований, не являющихся группами, и реперов, не являющихся частным положением подвижного репера группы.

IV. ГРУППА ПАРАМЕТРОВ

79. Определение группы параметров. Рассмотрим группу преобразований S_a и ее подвижной репер R_a. Каждое преобразование S_a переводит каждый репер R_ξ в другой репер $R_{\xi'}$. Мы обозначим через Θ_a преобразование, действующее в пространстве параметров и сопоставляющее точке ξ точку ξ'. Преобразования S_a будут преобразованиями, которые преобразуют одни реперы R_ξ в другие; отсюда следует, что преобразования Θ_a образуют группу; эта группа называется *группой параметров*.

Другими словами, наиболее общее преобразование Θ_a группы параметров определяется следующим образом.

Запишем:

$$\xi' = \Theta_a \xi, \text{ когда } S_{\xi'} = S_a S_\xi. \tag{25}$$

Соотношение $S_c = S_a S_b$ влечет $\Theta_c = \Theta_a \Theta_b$: соответствие, которое существует между операциями S_a и Θ_a группы и ее группы параметров, произведению преобразований ставит в соответствие, следовательно, выполненное в том же порядке произведение присоединенных преобразований. Этот факт выражают, говоря, что это соответствие сохраняет *закон композиции этих групп.* Или: *голоэдрически изоморфными* называют две группы, между преобразованиями которых можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее их законы композиции. *Всякая группа, следовательно, голоэдрически изоморфна своей группе параметров.*

С другой стороны, преобразование, которое переводит один репер в другой, — единственное; следовательно, в группе Θ_a существует одно и только одно преобразование, которое позволяет преобразовать данную точку ξ в заданную точку ξ'. Это выражают, говоря, что *группа параметров просто транзитивна.*

80. Формы Пфаффа, которые группа параметров оставляет инвариантными. Рассмотрим переменную точку ξ пространства параметров, фиксированное преобразование Θ_a группы параметров и точку $\xi' = \Theta_a \xi$; основное условие равенства (стр. 177) дает нам

$$\omega_p(\xi', d\xi') = \omega_p(\xi, d\xi).$$

Это соотношение выражают, говоря, что *группа параметров оставляет инвариантными r форм Пфаффа $\omega_p(\xi, d\xi)$*.

Определим все дифференциальные формы $\Omega(\xi, d\xi)$, которые группа параметров оставляет инвариантными. Формы $\omega_p(\xi, d\xi)$ линейно независимы (ср. п. **70**, стр. 169). Всякая дифференциальная форма $\Omega(\xi, d\xi)$ может быть, следовательно, записана в виде

$$\Omega(\xi, d\xi) = a_1(\xi)\,\omega_1(\xi, d\xi) + \ldots + a_r(\xi)\,\omega_r(\xi, d\xi).$$

Выразим, что она инвариантна относительно преобразования Θ_a, которое переводит ξ в ξ':

$$a_1(\xi)\,\omega_1(\xi, d\xi) + \ldots + a_r(\xi)\,\omega_r(\xi, d\xi) =$$
$$= a_1(\xi')\,\omega_1(\xi', d\xi') + \ldots + a_r(\xi')\,\omega_r(\xi', d\xi').$$

Однако мы знаем, что $\omega_p(\xi, d\xi) = \omega_p(\xi', d\xi')$, поэтому

$$[a_1(\xi) - a_1(\xi')]\,\omega_1(\xi, d\xi) + \ldots + [a_r(\xi) - a_r(\xi')]\,\omega_r(\xi, d\xi) = 0.$$

Следовательно, $a_p(\xi) = a_p(\xi')$. С другой стороны, точки ξ и ξ' могут быть выбраны произвольно, следовательно, каждая из функций a_p сводится к постоянной.

Будем теперь называть *относительными* [*или абсолютными*] *компонентами инфинитезимального смещения подвижного репера R_ξ не только формы $\omega_p(\xi, d\xi)$* [*или $\widetilde{\omega}_p(\xi, d\xi)$*], *а также их линейные комбинации с постоянными коэффициентами.*

Заключение этого пункта формулируется так: *только формы $\Omega(\xi, d\xi)$, которые группа параметров оставляет инвариантными, являются относительными компонентами инфинитезимальных смещений репера R_ξ.*

Обратная теорема будет установлена в п. 83 (стр. 186).

81. Инфинитезимальные преобразования группы параметров. Пусть дано преобразование Θ_ε с бесконечно малыми параметрами ε_i. Оно преобразует точку ξ в точку $\xi + \delta\xi$, которая определяется соотношением $R_{\xi+\delta\xi} = S_\varepsilon R_\xi$; это соотношение можно записать в виде

$$S_{\xi+\delta\xi} = S_\varepsilon S_\xi, \text{ или еще } S_{\xi+\delta\xi} S_\xi^{-1} = S_\varepsilon.$$

Оно эквивалентно, следовательно, r уравнениям

$$\widetilde{\omega}_p(\xi, \delta\xi) = \varepsilon_p. \tag{26}$$

Следовательно, символ инфинитезимального преобразования Θ_ε получается исключением $\delta\xi_p$ из уравнений (26) и уравнения

$$\delta f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \ldots + \frac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{\partial \xi_r}\delta\xi_r.$$

З а м е ч а н и е. Поскольку формы $\widetilde{\omega}_p(\xi, d\xi)$ линейно независимы, дифференциал df можно представить одним и только одним способом в виде

$$df = \widetilde{\omega}_1(\xi, d\xi) A_1 f + \ldots + \widetilde{\omega}_r(\xi, d\xi) A_r f, \tag{27}$$

где символы $A_p f$ представляют инфинитезимальные преобразования, независимые от дифференциалов $d\xi_p$. Когда df представлено в этой форме, символ наиболее общего инфинитезимального преобразования первой группы параметров получается немедленно: это

$$\delta f = \varepsilon_1 A_1 f + \ldots + \varepsilon_r A_r f. \tag{28}$$

Пример. Пусть дана группа линейных подстановок

$$x' = ax + b \qquad (a > 0).$$

Напомним, что (стр. 170 и 177)

$$\omega_1(a, b, da, db) = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{a}, \quad \widetilde{\omega}_1 = \frac{da}{a}, \quad \widetilde{\omega}_2 = db - b\frac{da}{a}.$$

Рассмотрим преобразование S_a

$$x' = ax + b$$

и преобразование S_ξ

$$x' = \xi x + \eta.$$

Преобразование $S_a S_\xi$ имеет уравнение

$$x' = a\xi x + a\eta + b.$$

Преобразование Θ_a первой группы параметров, следовательно, преобразует точку (ξ, η) в точку с координатами

$$\xi' = a\xi, \qquad \eta' = a\eta + b. \tag{29}$$

Без труда проверяется, что

$$\omega_p(a\xi, a\eta + b;\ ad\xi, ad\eta) = \omega_p(\xi, \eta;\ d\xi, d\eta).$$

Наиболее общее инфинитезимальное преобразование первой группы параметров получается, если положить

$$a = 1 + \varepsilon_1, \qquad b = \varepsilon_2;$$

в силу формул (29), оно преобразует точку (ξ, η) в точку $(\xi+\delta\xi, \eta+\delta\eta)$, определяемую двумя уравнениями:

$$\delta\xi = \varepsilon_1\xi, \qquad \delta\eta = \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2;$$

это инфинитезимальное преобразование будет, следовательно, иметь символ

$$\delta f = \varepsilon_1\left(\xi\frac{\partial f}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) + \varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial\eta}. \tag{30}$$

Покажем, что формулы (27) и (28) дают нам один и тот же результат. Формула (27) записывается в виде

$$df = \frac{d\xi}{\xi}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) + \left(d\eta - \eta\frac{d\xi}{\xi}\right)\frac{\partial f}{\partial\eta};$$

эта формула сводится к формуле (30), если df заменить на δf, $\widetilde{\omega}_1 = \frac{d\xi}{\xi}$ на ε_1, $\widetilde{\omega}_2 = d\eta - \eta\frac{d\xi}{\xi}$ на ε_2.

82. **Вторая группа параметров.** Обозначим через T преобразование пространства параметров, которое всякой точке a ставит в соответствие точку b так, что $S_b = S_a^{-1}$; преобразование T совпадает со своим обратным преобразованием T^{-1}.

Второй группой параметров называют совокупность преобразований, сопряженных с помощью T, преобразованиям из первой группы параметров, т. е. совокупность преобразований $T\Theta_a^{-1}T$.

Преобразуем с помощью T систему отнесения, выбранную в пространстве параметров. Относительными и абсолютными компонентами будут, после этого преобразования, формы Пфаффа, которые были первоначально обозначены $-\widetilde{\omega}_p$, $-\omega_p$ [ср. формулы (22), стр. 177]. Группой параметров будет, после этого преобразования, группа, которая первоначально называлась второй группой параметров. Отсюда получаем следующие три предложения:

1°. Группа голоэдрически изоморфна своей второй группе параметров.

2°. Формы, которые вторая группа параметров оставляет инвариантными, будут абсолютными компонентами подвижного репера.

3° Пусть f — произвольная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_r$, приведем дифференциал df к виду

$$df = \omega_1(\xi, d\xi)\,B_1 f + \ldots + \omega_r(\xi, d\xi)\,B_r f;$$

наиболее общее инфинитезимальное преобразование второй группы параметров имеет символом

$$\delta f = \varepsilon_1 B_1 f + \ldots + \varepsilon_r B_r f.$$

Мы будем обозначать через $\Psi_a = T\Theta_a^{-1}T$ наиболее общее преобразование второй группы параметров. Соотношение $\xi'' = \Psi_a\xi$ эквивалентно следующим соотношениям:

$$\xi'' = T\Theta_a^{-1}T\xi,\ T\xi'' = \Theta_a^{-1}T\xi,\ S_{\xi''}^{-1} = S_a^{-1}S_\xi^{-1},\ S_{\xi''} = S_\xi S_a.$$

Следовательно, Ψ_a определяется так:

$$\xi'' = \Psi_a\xi, \quad \text{когда} \quad S_{\xi''} = S_\xi S_a. \tag{31}$$

Рассмотрим какое-нибудь преобразование Θ_a группы параметров и какое-нибудь преобразование Ψ_b второй группы параметров; пусть ξ' и ξ'' — соответственно преобразования ξ посредством $\Theta_a\Psi_b$ и посредством $\Psi_b\Theta_a$; в силу (25) и (31), будем иметь:

$$S_{\xi'} = S_a S_{\eta'}, \quad \text{или} \quad S_{\eta'} = S_\xi S_b,$$

$$S_{\xi''} = S_{\eta''} S_b, \quad \text{или} \quad S_{\eta''} = S_a S_\xi.$$

Следовательно,

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_b, \qquad S_{\xi''} = S_a S_\xi S_b,$$

ξ' и ξ'' совпадают; $\Theta_a\Psi_b = \Psi_b\Theta_a$: *каждое из преобразований группы параметров перестановочно с каждым из преобразований второй группы параметров.*

V. НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

83. Построение группы параметров, исходя из относительных компонент. Рассмотрим конечную непрерывную группу преобразований S_a. Ее группа параметров Θ_a оставляет инвариантными r компонент $\omega_1(\xi, d\xi), \ldots, \omega_r(\xi, d\xi)$. Мы докажем, что это свойство характеризует ее.

Теорема. *Преобразования группы параметров — единственные преобразования, которые оставляют инвариантными r форм $\omega_p(\xi, d\xi)$.*

Чтобы установить это предложение, мы докажем следующее: если заданы r произвольных линейно независимых форм Пфаффа* $\omega_p(\xi, d\xi)$, то существует не более одного преобразования пространства параметров в себя, которое оставляет их инвариантными и которое преобразует заданную точку ξ_0 в заданную точку ξ_0'.

Пусть ξ_1 — произвольная точка пространства параметров; пусть ξ — переменная точка, зависящая от параметра t и совпадающая с точкой ξ_0 при $t=0$ и с точкой ξ_1 при $t=1$; формы $\omega_p(\xi, d\xi)$ превращаются при этих условиях в некоторые формы $\lambda_p(t)dt$ от t и dt.

---

* Мы уже установили, что формы $\omega_p(\xi, d\xi)$ линейно независимы (п. **71**, стр. 169).

Если искомое преобразование существует, то координаты точки ξ', образа точки ξ, будут функциями от параметра t, равными координатам точки ξ_0 при $t = 0$ и удовлетворяющими дифференциальной системе

$$\omega_p(\xi', d\xi') = \lambda_p(t)\,dt.$$

Эта система может быть разрешена относительно r дифференциалов $d\xi'$ *; те из ее интегралов, которые принимают заданные начальные значения, следовательно, вполне определены; положение точки ξ_1', образа точки ξ_1, не может, следовательно, быть неопределенным.

Замечание. Мы не утверждаем, что при заданных произвольных r формах Пфаффа π_p $(\xi, d\xi)$ всегда существует зависящая от r параметров группа преобразований, которая оставляет эти формы инвариантными. Это предложение ложно. Найдем, например, преобразования, которые оставляют инвариантными две формы:

$$\pi_1 = \frac{d\xi}{\eta}, \quad \pi_2 = d\eta.$$

Из соотношения $\dfrac{d\xi'}{\eta'} = \dfrac{d\xi}{\eta}$ вытекает, что ξ' есть функция только одного ξ; следовательно, получим $\xi' = f(\xi)$ и $\eta f'(\xi) = \eta'$.

Соотношение $d\eta' = d\eta$ доказывает, что $f'(\xi)$ не может быть отличным от 1. Искомые преобразования сводятся, следовательно, к следующим: $\xi' = \xi + a$; $\eta' = \eta$. Здесь фигурирует только один параметр a.

Компоненты ω_p инфинитезимального смещения подвижного репера удовлетворяют некоторым условиям структуры; изучение этих условий будет объектом третьей части курса.

84. Дополнения. Предыдущая теорема может быть рассмотрена как следствие следующей теоремы **:

Теорема. *Пусть даны R-мерное пространство с координатами $X_1, \ldots, X_R$ и N $(<R)$ независимых форм Пфаффа $\pi_1(X, dX), \ldots, \pi_N(X, dX)$.*

Мы будем называть *интегральным многообразием* системы уравнений Пфаффа

$$\pi_1(X, dX) = 0, \ldots, \pi_N(X, dX) = 0$$

* См. примечание на предыдущей странице.

** Достаточно положить для этого: $R = 2r$, $N = r$, $X_1 = \xi_1, \ldots, X_r = \xi_r$, $X_{r+1} = \xi_1', \ldots, X_R = \xi_r'$, $\pi_{r+1} = \omega_1(\xi, d\xi) - \omega_1(\xi', d\xi'), \ldots, \pi_N = \omega_r(\xi, d\xi) - \omega_r(\xi', d\xi')$.

всякое многообразие этого пространства, такое, что эти формы обращаются в нуль, когда точка $(X_1, \ldots, X_R)$ его описывает.

Мы утверждаем, что через заданную точку M_0 проходит самое большее одно интегральное многообразие $R—N$ измерений.

Действительно, проведем через точку M_0 какое-нибудь многообразие $N+1$ измерений

$$G_1(X_1, \ldots, X_R) = 0, \ldots, G_{R-N-1}(X_1, \ldots, X_R) = 0,$$

во всех точках которого формы

$$\pi_1(X, dX), \ldots, \pi_N(X, dX), dG_1, \ldots, dG_{R-N-1}$$

линейно независимы. Линия пересечения этого многообразия $N+1$ измерения и искомого многообразия не может быть неопределенной, потому что это будет интеграл, выходящий из точки M_0, дифференциальной системы

$$\pi_1(X, dX) = 0, \ldots, \pi_N(X, dX) = 0, dG_1 = 0, \ldots, dG_{R-N-1} = 0.$$

Этого факта достаточно для того, чтобы установить сформулированную теорему.

З а м е ч а н и е I. Отметим, что определение интегрального многообразия системы Пфаффа сводится к интегрированию дифференциальной системы.

З а м е ч а н и е II. Само собой разумеется, что при произвольно заданных N формах Пфаффа $\pi_1(X, dX), \ldots, \pi_N(X, dX)$ через каждую точку M_0 пространства $(X_1, \ldots, X_R)$ не проходит необходимо интегрального многообразия $R—N$ измерений системы

$$\pi_1 = 0, \ \ldots, \ \pi_N = 0.$$

Это не будет, например, для системы

$$A(X, Y, Z)\,dX + B(X, Y, Z)\,dY + C(X, Y, Z)\,dZ = 0,$$

вектор (A, B, C) которой все время перпендикулярен своей ротации. Системы, обладающие этим свойством, называются *вполне интегрируемыми*.

85. Построение группы, исходя из ее инфинитезимальных преобразований (первый способ). Пусть дана группа преобразований S_a, которые оперируют в области D. Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — инфинитезимальные преобразования этой группы. Рассмотрим точку M_0 области D, координаты которой $(x_1^0, \ldots, x_0^n)$, и ее образ $M_1(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ при преобразовании S_a.

Введем переменное преобразование $S(t)$, которое принадлежит группе и зависит от параметра t, такое, что при $t=0$ оно совпадает с тождественным, а при $t=1$ — с преобразованием S_a. Пусть точка $M(x_1, \ldots, x_n)$ есть образ точки M_0 при преобразовании $S(t)$.

Когда t получает приращение dt, точка M испытывает инфинитезимальное преобразование $S(t+dt)\cdot S(t)^{-1}$; координаты $x_1, \ldots, x_n$ получают, следовательно, приращения

$$dx_1 = \widetilde{\omega}_1(t, dt)\,X_1x_1 + \ldots + \widetilde{\omega}_r(t, dt)\,X_rx_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dx_n = \widetilde{\omega}_1(t, dt)\,X_1x_n + \ldots + \widetilde{\omega}_r(t, dt)\,X_rx_n.$$

Если предположить формы $\widetilde{\omega}_p(t, dt)$ заданными, эти уравнения образуют дифференциальную систему, интегралы которой $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, соответствующие начальным значениям $x_1^0, \ldots, x_n^0$, — единственные; координаты $x_1^1, \ldots, x_n^1$ будут значениями, которые принимают эти функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ при $t=1$. Но из теоремы структуры п. **77** (стр. 179) следует, что $\omega_1(t, dt), \ldots, \omega_r(t, dt)$ суть произвольные формы Пфаффа $\lambda_1(t)\,dt, \ldots, \lambda_r(t)\,dt$ относительно t. Следовательно, можно построить группу, отправляясь от ее инфинитезимальных преобразований с помощью следующего процесса.

Произвольно выбираем r ограниченных функций $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t)$, находим общее решение $x_i(t)$ дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_1(t)\,X_1x_i + \ldots + \lambda_r(t)\,X_rx_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (32)$$

ставим в соответствие точке M_0 с координатами $x_i(0)$ точку M_1 с координатами $x_i(1)$; таким образом получаем наиболее общее преобразование группы.

В более наглядной форме: наиболее общее преобразование группы есть произведение бесконечного множества бесконечно малых преобразований с компонентами $\lambda_s(t)\,dt$. Для запоминания этого факта обыкновенно говорят, что *инфинитезимальные преобразования порождают эту группу.*

Примечание. Мы не утверждаем, что мы можем найти группу, обладающую произвольно выбранными инфинитезимальными преобразованиями, это предложение ложно; инфинитезимальные преобразования группы удовлетворяют уравнениями структуры, которые мы выведем в третьей части курса (дополнение ко второй основной теореме, стр. 353).

86. Построение группы исходя из ее инфинитезимальных преобразований (второй способ). Выполним следующее построение:

Зададимся произвольными r константами $a_1, \ldots, a_r$; будем искать общее решение $x_i(t)$ дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = a_1X_1x_i + \ldots + a_rX_rx_i \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{33}$$

поставим в соответствие точке M_0 с координатами $x_i(0)$ точку M_1 с координатами $x_i(1)$.

Полученные таким образом преобразования принадлежат группе; они зависят от r параметров $a_1, \ldots, a_r$; число параметров не меньше r, потому что $X_1, \ldots, X_r$ линейно независимы. Они образуют, следовательно, *ядро группы**, которую мы хотим построить. Это ядро содержит тождественное преобразование.

*Наиболее общее преобразование группы получится, если перемножить конечное число преобразований, принадлежащих этому ядру группы***. Действительно, если задано некоторое преобразование S группы, его можно связать с тождественным преобразованием I последовательностью преобразований

$$I, S_1, \ldots, S_n, S,$$

таких, что все преобразования

$$S_1, S_1^{-1}S_2, S_2^{-1}S_3, \ldots, S_{n-1}^{-1}S_n, S_n^{-1}S$$

будут достаточно близки к тождественному, чтобы принадлежать ядру группы [15]. Но

$$S = S_1S_1^{-1}S_2S_2^{-1}S_3 \ldots S_{n-1}^{-1}S_nS_n^{-1}S.$$

87. Построение множества образов некоторой точки при преобразованиях группы, инфинитезимальные преобразования которой известны. Пусть дана группа, которая действует в области D и инфинитезимальными преобразованиями которой будут $X_1, \ldots X_r$. Мы будем говорить, что две точки области D *гомологичны,* если некоторое преобразование группы позво-

* В п. 201 мы покажем, например, для группы линейных подстановок с двумя переменными, что это ядро группы может не покрывать всю группу [см. на стр. 336 исследование преобразований, полученных при интегрировании системы (33)].

** Этот факт запоминают, говоря, что ядро группы *порождает* группу.

ляет преобразовать одну из этих точек в другую. Гомологичные точки для точки M_0 с координатами $x_1^0, \ldots, x_n^0$ образуют множество точек M, координаты которых получаются в результате интегрирования системы (32), где для $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t)$ сделаны все возможные выборы, при начальных значениях

$$x_i(0) = x_i^0, \ldots, x_n(0) = x_n^0.$$

Иначе говоря, чтобы две точки области D были гомологичны, необходимо и достаточно, чтобы подвижная точка области D могла переходить от одной точки к другой со скоростью, остающейся во время движения линейной комбинацией с ограниченными коэффициентами r векторов

$$X_1x_1, \ldots, X_1x_n), \ (X_2x_1, \ldots, X_2x_n), \ldots, \ (X_rx_1, \ldots, X_rx_n). \tag{34}$$

Например, если $r = n$, две точки области D будут необходимо гомологичными, если возможно соединить их путем, вдоль которого определитель $|X_px_i|$ не обращается в нуль.

Если $r \geqslant n$, две точки области D необходимо будут гомологичными, если можно соединить их путем, вдоль которого матрица $|X_px_i|$ все время имеет ранг n.

Если $r < n$, то гомологичные точки данной точки образуют r-мерное многообразие, касательная гиперплоскость которого содержит r векторов (34). Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые будут постоянны на этом многообразии, будут, следовательно, удовлетворять системе

$$X_1f = 0, \ldots, X_rf = 0. \tag{35}$$

Следовательно, в левых частях уравнений этого многообразия

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-r}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-r}$$

содержится $n - r$ независимых интегралов системы (35).

Глава VI

РАЗЛИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, КОТОРЫЕ МОГУТ СУЩЕСТВОВАТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ГРУППАМИ

I. ПОДОБНЫЕ ГРУППЫ

88. Пусть дано преобразование S, действующее в n-мерной области D:

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Будем пользоваться вместо первоначальной системы координат R_0 новой системой координат R_1; та же геометрическая операция производится теперь новым аналитическим преобразованием S_1:

$$X'_i = \Phi_i(X_1, \ldots, X_n). \tag{2}$$

Говорят, что преобразования (1) и (2) *подобны*.

Пример. Предположим, что R_1 будет системой координат, полученной из R_0 с помощью преобразования T области D в себя: $R_1 = TR_0$. Тогда S_1 будет преобразованием, сопряженным * к S с помощью преобразования T^{-1} : $S_1 = T^{-1}ST$. Любое преобразование, следовательно, подобно всем своим сопряженным преобразованиям.

Аналогично, если даны две *группы* G и G', действующие в двух областях D и D', мы будем говорить, что они *подобны*, если посредством подходящей замены координат области D преобразования группы G будут иметь то же аналитическое выражение, что и преобразования группы G'. Другими словами, существует взаимно однозначное соответствие C

* Ср. *замечание* п. **61** (стр. 157).

между точками D и точками D', которое отождествляет преобразования G' с преобразованиями из G. Говорят, что G' — *группа, сопряженная к G с помощью C.*

Две подобные группы могут рассматриваться как геометрически тождественные: изучать одну из них — значит изучать и другую.

Примеры. Группа вращений вокруг точки A подобна группе вращений вокруг другой точки A': заменой координат, доказывающей это подобие, будет перенос $\overrightarrow{AA'}$. Этот перенос и эти вращения, впрочем, принадлежат группе движений.

Рассмотрим теперь вместо группы движений произвольную группу G, вместо вращений около точки A подгруппу g группы G, вместо переноса $\overrightarrow{AA'}$ преобразование S группы G, не принадлежащее g: вместо вращений вокруг A' преобразования SgS^{-1}, сопряженные к преобразованиям g с помощью S; они образуют подгруппу группы G, которая будет подгруппой, сопряженной к g с помощью S; эта подгруппа будет подобна группе g.

Предыдущие примеры показывают полезность следующих определений: два преобразования группы G называются *гомологичными,* если одно будет сопряжено к другому с помощью некоторого преобразования из G.

Аналогично две подгруппы одной группы G называются *гомологичными,* если одна из них будет сопряжена к другой с помощью некоторого преобразования из G. Следовательно, чтобы два преобразования или две подгруппы были гомологичны, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти в семействе преобразований абсолютного репера посредством G два репера, относительно которых они имели бы одни и те же уравнения.

Отметим, наконец, что два преобразования или две подгруппы, гомологичные одному и тому же третьему преобразованию или подгруппе, будут гомологичны между собой; в самом деле, соотношения

$$S_1 = S_a^{-1} S S_a \text{ и } S = S_b^{-1} S_2 S_b$$

дают

$$S_1 = (S_b S_a)^{-1} S_2 (S_b S_a).$$

II. ПОНЯТИЕ ИЗОМОРФИЗМА

89. Введение. Различные аспекты, которые представляет группа перемещений. Рассмотрим группу перемещений пространства. Имеют место существенно различные уравнения, смотря по тому, являются ли используемые координаты то-

чечными или тангенциальными. Точнее, можно прилагать преобразования группы не только к точкам, но и к плоскостям; получаются две группы G и G', которые не будут подобны. Обобщаем: пусть даны «объекты», каждый из которых образуется множеством точек (например, плоскости, прямые сферы, эллипсоиды); мы знаем, как преобразуется один из этих объектов при перемещении; рассмотрим класс таких объектов, содержащих образы при всех перемещениях каждого объекта этого класса; группа перемещений действует над объектами этого класса. Она принимает различные виды, смотря по выбору класса: получаемые группы не подобны, если рассматривать класс плоскостей, класс прямых, класс эллипсоидов, оси которых имеют длины 1,2 и 3, класс эллипсоидов вращения, класс сфер, класс сфер единичного радиуса. Изучение группы G связано, следовательно, с изучением значительного числа других групп.

Важно заметить, что это приводит к подобным группам при рассмотрении класса точек и класса сфер единичного радиуса. Действительно, можно установить между этими двумя классами взаимно однозначное соответствие так, что два гомологичных объекта остаются гомологичными и после одного и того же перемещения. Такие два класса называются *эквивалентными*.

Однако, с другой стороны, элементарная геометрия определяет перемещения ориентируемой прямой, направления прямых: мы можем говорить о классе ориентируемых прямых, о классе направлений прямых. Легко установить, что ни один из этих двух классов неэквивалентен никакому классу объектов, каждый из которых образован множеством точек. Мы, таким образом, пришли к разысканию «объектов» более общих, чем те, которые мы определили в предыдущем пункте. Мы достигнем этого с помощью некоторого рекуррентного процесса: после того как мы определим некоторые классы объектов, мы будем рассматривать, как новые объекты, множества, элементами которых будут уже определенные объекты; переместить одно из этих множеств с помощью некоторого перемещения — значит переместить каждый из его элементов с помощью этого перемещения.

Рассмотрим, например, объекты ω_1, образованные тремя точками A, B, C, лежащими на одной прямой и такими, что перенос $\overrightarrow{AB}$, повторенный три раза, преобразует A в C: мы имеем класс объектов, эквивалентных вектору $\overrightarrow{AC}$. Введем теперь объекты ω_2, каждый из которых образован мно-

жеством объектов (A, B, C) и которые соответствуют векторам $\overrightarrow{AC}$, расположенным на той же прямой и имеющим то же направление; класс объектов ω_2, эквивалентен классу ориентированных прямых. Введем теперь класс объектов ω_3, каждый из которых образован множеством объектов ω_2, которые соответствуют параллельным ориентированным прямым — мы получим класс объектов, эквивалентных классу направлений ориентированных прямых.

Замечание. Все переносы эквивалентны тождественному преобразованию, если они прилагаются к объектам ω_3.

90. Определение изоморфизма. Если задан класс ω объектов, построенных рекуррентным процессом, указанным в предыдущем пункте, то перемещения определяют группу Γ преобразований, оперирующих над этим классом. Группу Γ с группой перемещений G связывает следующее свойство:

Между преобразованиями G и Γ существует соответствие; каждому преобразованию Γ соответствует, по крайней мере, одно преобразование G; каждому преобразованию G соответствует единственное преобразование Γ; произведению двух преобразований G всегда соответствует выполненное в том же порядке произведение соответствующих преобразований Γ.

Тот факт, что две произвольные группы G и Γ обладают этой совокупностью свойств, мы выразим, говоря, что Γ *гомоморфна*, или *мериэдрически изоморфно*, группе G. Это понятие мериэдрического изоморфизма, которое нам подсказал п. **89**, имеет очень большое значение.

Если соответствие, которое существует между преобразованиями G и преобразованиями Γ, взаимно однозначно, тогда две группы называются *голоэдрически изоморфными;* так будет для случая группы и ее группы параметров (см. п. **79**, стр. 182).

Примеры и замечания. Группа перемещений, оперирующая над направлениями ориентированных прямых, будет мериэдрически изоморфна группе перемещений, оперирующей над точками, но она не будет голоэдрически изоморфна ей: тождественному преобразованию первой во второй соответствуют все переносы. Если первая группа мериэдрически изоморфна второй и если эта вторая группа сама мериэдрически изоморфна третьей, то первая группа мериэдрически изоморфна третьей. Точно также две группы, голоэдрически изоморфные одной и той же третьей группе, голоэдрически изоморфны между собой.

Пусть даны группа G и группа Γ, мериэдрически изоморфная группе G; Γ оперирует на множестве точек или объектов Δ. Мы будем считать, что если некоторое преобразование G также оперирует над Δ, то его действие, по определению,

будет то же, что и действие соответствующего преобразования Г: *это условие* удобно, ибо оно не меняет закон композиции группы G. Оно согласуется с условиями, высказанными в п. 89 относительно группы перемещений.

Пример. Предположим, что Δ будет множеством реперов группы G, Г — ее группа параметров; G и Г изоморфны; условие, которое мы дали, совпадает с определением, которое было ранее сформулировано, о преобразовании репера посредством операции группы G.

91. Классы объектов, которые преобразует данная группа. В этом пункте мы хотим обобщить рассуждения п. 89. Рассмотрим вместо группы перемещений произвольную группу G. Пусть дано множество объектов ω, для которых определены преобразования посредством группы G; предположим, что это множество содержит все образы каждого из его элементов при всех преобразованиях группы G. Мы будем говорить тогда, что это множество образует *класс*; группу преобразований объектов этого класса будем обозначать символом $G(\omega)$; группа $G(\omega)$ необходимо гомоморфна G.

Пусть дан такой класс ω; рассмотрим совокупность Ω объектов ω; образом такого множества Ω при операциях группы G назовем совокупность образов всех его элементов; предположим, что множество Ω содержит образы всех своих элементов; тогда группа $G(\Omega)$ преобразований элементов Ω операциями группы G будет мериэдрически изоморфна группе G; все Ω образуют класс объектов, над которыми оперирует группа G. Это замечание дает нам рекуррентный процесс, который позволяет строить все более и более обширные классы объектов и новых групп, мериэдрически изоморфных группе G.

Заметим, что мы уже испытали практическую необходимость умения оперировать аффинной группой над классом объектов, которые образуют векторы (п. 65, стр. 161), затем проективной группой над классом объектов, которые образуют аналитические точки (п. 67, стр. 163).

Две группы $G(\Omega_1)$ и $G(\Omega_2)$ могут быть подобны: для этого необходимо и достаточно, чтобы между объектами Ω_1 и объектами Ω_2 существовало такое взаимно однозначное соответствие, при котором два соответствующих объекта оставались бы соответствующими после того, как они подверглись одному и тому же преобразованию группы G. Два класса, обладающих этим свойством, носят название двух *эквивалентных классов*.

В этой главе мы разрешим две следующие проблемы, полную эквивалентность которых полезно отметить.

1°. Для заданной группы G построить группы, которые будут ей мериэдрически изоморфными и такими, что всякая группа, мериэдрически изоморфная группе G, будет подобна одной из построенных нами групп.

2°. Для заданной группы G построить классы объектов, над которыми эта группа оперирует, так, что всякий класс объектов, который преобразуется группой G, будет эквивалентен одному из построенных нами классов объектов.

III. РЕПЕРИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ЗАДАННОГО КЛАССА ОБЪЕКТОВ

92. Введение. В первой части этого курса мы постоянно обращались с геометрическими объектами уже немного абстрактной природы — элементами касания различных порядков; и мы научились присоединять к каждому из этих элементов касания репер или семейство реперов* и, кроме того, иногда, скалярные величины, так, что мы всегда могли дать проблемам касания следующее решение:

*Чтобы два элемента касания были равны, необходимо и достаточно, чтобы присоединенные системы скалярных величин были тождественно одними и теми же***.

Перемещениями, которые налагают два равных элемента касания, будут те перемещения, которые преобразуют репер, присоединенный к первому элементу, в репер, присоединенный ко второму.

Другими словами, каждый элемент касания характеризуется *семейством реперов,* относительно которых он занимает одно и то же положение, и системой чисел, *инвариантов,* которые сохраняют «свою форму».

Мы хотим показать, что этот процесс, посредством которого мы отмечали элементы касания заданного порядка, имеет очень общее значение.

Для этого мы будем различать несколько случаев.

Определения. Будем говорить, что группа G *действует транзитивно* над классом объектов ω, если всегда существует преобразование этой группы, которое преобразует произвольно выбранный объект ω в другой, также произвольно выбранный объект ω.

Если это преобразование всегда единственное, то говорят, что группа $G(\omega)$ *просто транзитивна.*

---

* Которые были триортогональными или циклическими триэдрами.

** Это тождество, в частности, реализуется тогда, когда к рассматриваемым элементам касания не присоединено никаких скалярных величин.

Пример. Всякая группа параметров просто транзитивна.

Группа $G(\omega)$, не являющаяся транзитивной, называется *интранзитивной.*

Пример. Группа перемещений действует транзитивно над точками, интранзитивно — над сферами.

93. Реперирование класса объектов ω, которые группа G преобразует транзитивно. Реперирование этих объектов не требует применения инвариантов и очень просто. Выберем произвольно один из этих объектов ω_1 и один репер R_1; присоединим к каждому объекту ω семейство* реперов R, относительно которых он занимает такое же положение, какое занимает объект ω_1 относительно R_1. Другими словами: пусть g_1 — подгруппа преобразований группы G, которые сохраняют неподвижным объект ω_1; пусть S — одно из преобразований, которые преобразуют ω_1 в ω; тогда реперами, которые мы присоединим к ω, будут реперы Sg_1R_1. Семейство реперов, таким образом присоединенных к каждому объекту ω, вполне характеризует его: чтобы два объекта ω совпадали, необходимо и достаточно, чтобы их семейства реперов имели бы один общий элемент, но тогда совпадут и все их элементы; преобразованиями, которые переводят один объект ω в другой, будут такие преобразования, которые переводят некоторый репер, присоединенный к одному объекту, в некоторый репер, присоединенный к другому.

Пример. В первой части этого курса мы с различных сторон практически реперировали прямую с помощью семейства триэдров, первое ребро которых лежало на этой прямой.

Общие сведения об операции, называемой ориентированием. Отметим одно обстоятельство, которое часто встречается (например, когда G есть группа действительных перемещений, а ω — класс действительных прямых): преобразования подгруппы g_1 могут образовать несколько различных непрерывных областей. Пусть теперь g_1' — та из этих непрерывных областей, которая содержит тождественное преобразование; преобразования подгруппы g_1' характеризуются тем, что их можно непрерывным процессом свести к тождественному, не выходя из g_1; они образуют наибольшую непрерывную подгруппу g_1. Полезно рассмотреть объект ω_1', который содержит семейство реперов $g_1'R_1$, и класс ω', объекты которого получаются из объектов класса ω при всевозможных

* Это семейство получится, если преобразовать R_1 с помощью множества преобразований группы, которые переводят ω_1 в ω.

преобразованиях группы G; семейство реперов, присоединенных к объекту ω, разлагается на непрерывные подсемейства, каждое из которых является семейством реперов, присоединенным к объекту ω'. Эти объекты ω' называются «ориентированными объектами ω»; всякий объект ω будет рассматриваться как объединение конечного числа или дискретного множества ориентированных объектов ω'.

94. Реперирование класса объектов ω, которые группа G преобразует интранзитивно. Этот класс распадается на подклассы δ, каждый из которых образован множеством преобразований одного и того же объекта ω. Подклассы δ попарно не имеют общих элементов; группа G транзитивно действует в каждом из них*.

Укажем, например, группу перемещений, которая действует интранзитивно над элементами касания второго порядка действительных кривых; в частности, она преобразует специальным образом те кривые, кривизна которых равна нулю.

Мы начнем с реперирования подклассов δ при помощи системы чисел, называемых инвариантами; затем элементы каждого из подклассов, над которыми группа G действует транзитивно, будут реперированы так, как мы научились в предыдущем пункте. Объект ω тогда будет характеризоваться инвариантами своих подклассов.

Этот процесс реперирования объектов одного класса имеет наиболее высокую практическую важность; мы уже говорили, что он составляет основу метода подвижного репера; мы будем им пользоваться также в пп. **95** и **96** при разрешении проблемы построения всех групп, изоморфных данной группе.

Уточним конструкцию подклассов класса ω и выбор инвариантов для следующего случая, который особенно интересен: это случай, когда объекты ω будут точками некоторой области D; группа G определяется аналитическими уравнениями

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r). \qquad (1)$$

Подклассы δ будут многообразиями. Найдем то из них, которое проходит через данную точку $A_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Оно состоит из множества образов точки A_0 при всевозможных преобразованиях группы G. Его уравнения, следовательно, получатся, если исключить r параметров a из n уравнений

$$x_i = \varphi_i(x_i^0, \ldots, x_n^0;\ a_1, \ldots, a_r).$$

---

* Иначе говоря, к каждому подклассу δ присоединена группа G_δ, которая транзитивно преобразует объекты, образующие δ.

Впрочем, это все равно, что исключить эти параметры из уравнений

$$x_i^0 = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r).$$

Предположим, что, можно выбрать координаты так, что каждая точка A области D имеет единственный образ, у которого r первых координат равны нулю *. Каждое многообразие δ имеет одну и только одну точку A_1, r первых координат которой равны нулю; в качестве параметров этого многообразия можно выбрать остальные $n-r$ координат $\overset{1}{x}_{r+1}, \ldots, \overset{1}{x}_n$ этой точки. Уравнения этого многообразия получатся тогда, если разрешить относительно a r уравнений

$$0 = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

внести полученные значения в $n-r$ функций

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = r+1, \ldots, n)$$

и приравнять таким образом построенные функции от x

$$y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_{n-r}(x_1, \ldots, x_n)$$

$n-r$ произвольным постоянным $\overset{1}{x}_{r+1}, \ldots, \overset{1}{x}_n$**.

К многообразиям δ можно прийти следующим более общим процессом. Пусть дана точка A области D, находим ее преобразование A_0, удовлетворяющее некоторым условиям, которые определяют ее единственным образом и которые не зависят от A: параметры, от которых зависит точка A_0, являются функциями координат точки A, которые *инвариантны относительно всякого преобразования группы* ***; остается приравнять их произвольным константам, чтобы получить уравнения многообразий δ.

IV. ГРУППЫ, ИЗОМОРФНЫЕ ДАННОЙ ГРУППЕ

95. Отыскание транзитивных групп, мериэдрически изоморфных группе G. Пусть дан класс объектов ω, которые группа G преобразует транзитивно. Пусть g_1 — подгруппа преобразований G, которые оставляют неподвижным некоторый объект ω_1 данного класса объектов. В п. **93** мы рассмотрели семейство реперов g_1R_1 и класс реперов, полученных из этого семейства всеми преобразованиями группы G; из этих соображений вытекает, что этот класс эквивалентен классу ω.

Дадим поэтому следующее о п р е д е л е н и е: пусть g — подгруппа группы G, рассмотрим совокупность точек, которые представляют ее в пространстве параметров, и пусть c — класс, получаемый в результате преобразований этой сово-

---

* Это всегда возможно в достаточно малой окрестности *общей* точки области D.

** Этот процесс принадлежит Софусу Ли.

*** Это выражение означает, что значения этих функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$ остаются неизменными, если подставить в них вместо величин $x_1, \ldots, x_n$ их преобразование произвольной операцией группы.

купности операциями группы G: этот класс c будет называться *«телом, определенным подгруппой»* *.

В силу ранее изложенного, *класс* ω, *над которым группа* G *действует транзитивно, эквивалентен телу* c_1, *определенному подгруппой* g_1, *оставляющей инвариантным произвольно выбранный в классе* ω *объект* ω_1.

Пусть g_2 — подгруппа, оставляющая инвариантным объект $\omega_2 = S\omega_1$; тогда $g_2 = Sg_1S^{-1}$ — подгруппа, сопряженная g_1 посредством S. Таким образом, *два гомологичных тела* (мы понимаем под этим два тела, определенных двумя гомологичными подгруппами) *эквивалентны.*

Обратно, преобразования группы G, которые оставляют инвариантными два гомологичных объекта двух эквивалентных тел, образуют одну и ту же подгруппу; эта подгруппа, как мы увидим в дальнейшем, гомологична подгруппам, которые определяют эти два тела: *два эквивалентных тела, следовательно, гомологичны.*

Мы можем теперь указать путь для разрешения двух эквивалентных задач, поставленных в конце п. **91** (стр. 197), при условии, что мы ограничимся отысканием транзитивных групп.

Строится совокупность подгрупп группы g, гомологичные группы которой составляют все подгруппы группы G; рассматриваются тела c, которые ими определяются; каждый класс объектов, который группа G преобразует транзитивно, эквивалентен одному из этих тел; транзитивными группами, мериэдрически изоморфными группе G, будут группы, подобные группам $G(c)$.

96. Отыскание интранзитивных групп, мериэдрически изоморфных группе *G*. П. **94** приводит к следующим соображениям. Пусть дано множество тел c_s где одно и то же тело может повторяться несколько раз; пусть C — объединение всех объектов этих тел; два элемента объединения C рассматриваются как тождественные только в том случае, когда они принадлежат одному и тому же телу c_s и тождественны в этом теле. Всякий класс, преобразованный *интранзитивно* с помощью группы G, эквивалентен одному такому объединению C тел c_s, а всякая транзитивная группа, мериэдрически изоморфная группе G, подобна одной из групп $G(c)$.

З а м е ч а н и е. Объединение C тел c_s преобразуется в эквивалентное объединение, если заменить одно или несколько тел гомологичными им телами.

---

* Всякое тело транзитивно преобразуется группой G.

97. Различие между голоэдрическим и мериэдрическим изоморфизмом. $G(\omega)$ может не быть голоэдрически изоморфна группе G: это — тот случай, когда преобразования γ_ω, общие подгруппам группы G, оставляющим неподвижными различные объекты ω, не сводятся к тождественному преобразованию. Эти преобразования γ_ω, очевидно, образуют подгруппу группы G. Чтобы два преобразования S' и S'' из G одинаково действовали на класс ω, необходимо и достаточно, чтобы $S'^{-1}S''$ было одним из преобразований γ_ω.

Пример. Полное изучение группы перемещений G включает в себя изучение всех мериэдрических изоморфных ей групп, следовательно, в частности, и изучение способов, как G оперирует над бесконечно удаленными точками ω, т. е. изучение проективных преобразований плоскости, которые сохраняют неподвижным одно коническое сечение. Эта группа $G(\omega)$ не будет голоэдрически изоморфной группе G: преобразования γ_ω будут переносами; изучение проективных преобразований плоскости, которые оставляют неподвижным коническое сечение, не включает изучения группы перемещений пространства.

Отметим важное свойство подгруппы преобразований γ_ω: каков бы ни был объект ω, преобразование γ_ω и преобразование S из группы G, мы должны иметь $\gamma_\omega S\omega = S\omega$; следовательно, $S^{-1}\gamma_\omega S\omega = \omega$. Таким образом, сопряженное к γ_ω преобразование с помощью различных операций группы G все еще принадлежит подгруппе γ_ω. Подгруппа, обладающая этим свойством быть тождественной со всеми своими гомологичными подгруппами, называется *инвариантной подгруппой.*

Если инвариантная подгруппа группы G содержится в другой подгруппе группы G, она несомненно содержится во всех сопряженных подгруппах этой последней. Отсюда получается следующее предложение. Предположим, что группа $G(\omega)$ транзитивна; пусть ω_1 — один из объектов ω, пусть g_1 — подгруппа преобразований, которые оставляют ω_1 инвариантным; γ_ω может быть определена как наибольшая инвариантная подгруппа группы G, содержащая g_1.

98. Важные замечания. Таким образом, изучение групп, изоморфных данной группе G, сводится к определению всех подгрупп группы G. Глава IX (п. **115**, стр. 231) покажет, к каким задачам дифференциального и интегрального исчислений можно привести эту последнюю задачу. Она не требует, впрочем, знания самой группы G, а требует только знания, каким образом составляются ее операции, ее «закон композиции» *, т. е. требует знания ее группы параметров.

---

* Такой закон обладает следующими характеристическими свойствами: он оперирует над совокупностью абстрактных элементов; один из

Мы будем говорить, что задать закон композиции — значит задать *абстрактную группу.* Изложенное выше учит нас представлять все группы, закон композиции которых есть закон композиции этой абстрактной группы, учит нас *строить все конкретные представления заданной абстрактной группы,* если мы знаем все подгруппы этой абстрактной группы. Закон композиции группы, т. е. ее *структура,* или ее группа параметров, дает, следовательно, все основное, содержащееся в этой группе.

Докажем в связи с этим следующую теорему:

Чтобы две группы были голоэдрически изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их группы параметров были подобны. Действительно, пусть G и G' — две изоморфные группы; по определению, можно установить между преобразованиями G и G' взаимно однозначное соответствие, которое ассоциирует произведению двух преобразований из G выполняемое в том же порядке произведение двух соответствующих преобразований из G'; пусть точка ξ — точка пространства параметров группы G, ξ' — ей соответствующая точка; пусть T — преобразование первой группы параметров группы G, T' — соответствующее ему преобразование; тогда точке $T\xi$ соответствует точка $T'\xi'$; группы параметров групп G и G' будут, следовательно, подобны.

Обратно, пусть даны две группы, группы параметров которых подобны; это подобие устанавливает соответствие между точками ξ и ξ' двух пространств параметров; отсюда без труда получается изоморфизм двух групп.

Следствие. *Если для данной группы изменить выбор параметров, то новая группа параметров подобна первоначальной группе параметров.*

Этот пункт приводит нас естественно к поискам связей, которые существуют между группой и ее группой параметров. Этим мы и займемся в следующей главе. Заключения этой главы будут служить основой для главы VIII.

этих элементов называется тождественным и обозначается посредством I; он присоединяет к любым двум из этих данных в некотором порядке элементов a и b третий элемент, называемый произведением и обозначаемый $a \cdot b$; это произведение ассоциативно:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Имеем

$$a \cdot I = I \cdot a.$$

Всякому элементу a соответствует элемент, называемый обратным и обозначаемый a^{-1}, такой, что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I.$$

Глава VII

СООТНОШЕНИЯ, СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕЖДУ ГРУППОЙ И ЕЕ ГРУППОЙ ПАРАМЕТРОВ

I. ПРОСТО ТРАНЗИТИВНАЯ ГРУППА

99. Пусть G — просто транзитивная группа. Выберем в качестве репера R_0 начало* координат A. Репер $R = SR_0$ будет при этих условиях точкой SA; примем координаты этой точки за параметры преобразования S и репера R. Тогда группа будет тождественна своей группе параметров.

Следствие и теорема п. **98** позволяют нам вывести следующие результаты:

Всякая просто транзитивная группа подобна своей группе параметров.

Две просто транзитивные группы не могут быть изоморфными без того, чтобы быть подобными.

II. ТРАНЗИТИВНАЯ ГРУППА

100. Общие сведения. Рассмотрим теперь транзитивную группу G, которая оперирует над точками области D. Предположим, что определена абсолютная система координат R_0, началом которой будет точка A, лежащая внутри области D. Будем называть началом какого-нибудь другого репера $R=SR_0$ точку $M= SA$ — образ точки A при преобразовании S, которое переводит R_0 в R. Выберем в качестве параметров этого репера R и преобразования S координаты

* Предполагается, что оно находится внутри той области, в которой действует группа.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ начала M репера R и $r-n$ других надлежащим образом выбранных величин* $u_1, u_2, \ldots, u_{r-n}$.

Это условие допустимо, если преобразование параметров $a_1, \ldots, a_r$ переводит точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_1', \ldots, x_n')$, определяемую формулами

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \tag{1}$$

тогда оно преобразует репер $(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_{r-n})$ в репер с началом $(x_1', \ldots, x_n')$, т. е. в репер с параметрами $x_1', \ldots, x_n'$; $u_1', \ldots, u_{r-n}'$, определяемыми формулами

$$\left.\begin{aligned} & x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ & u_j' = \psi_j(u_1, \ldots, u_{r-n}; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \\ & \qquad\qquad (j = 1, \ldots, r-n). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть задана группа G, оперирующая над n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$; условимся говорить, что группа G', оперирующая над теми же n переменными x_i и над p другими переменными $y_1, \ldots, y_p$, служит *голоэдрическим продолжением* группы G:

1° если она преобразует переменные x_i так же, как и группа G;

2° если всякому преобразованию T группы G соответствует единственное преобразование T' группы G', преобразующее x_i так же, как и T.

Группу параметров заданной транзитивной группы G можно, следовательно, рассматривать как голоэдрическое продолжение группы G, и мы можем, таким образом, установить следующий результат:

Всякая транзитивная группа G допускает голоэдрическое просто транзитивное продолжение; очевидно, что такое продолжение необходимо будет подобно группе параметров.

Замечания. Этот результат позволяет нам сформулировать в новом виде условие голоэдрического изоморфизма двух транзитивных групп: для этого необходимо и достаточно, чтобы они допускали голоэдрические подобные продолжения.

Теперь представляется возможным также дать новый вид задаче отыскания всех транзитивных групп, изоморфных

---

* Мы должны предположить непрерывной подгруппу преобразований группы G, которые оставляют неподвижной одну точку области D. Другими словами, мы предполагаем, что точки области D будут ориентированными объектами (ср. п. **93**, стр. 198).

данной группе. Можно предположить, что речь идет о группе параметров от r переменных. Задача состоит, следовательно, в том, чтобы найти все возможные такие выборы переменных, чтобы $n(<r)$ этих переменных $x_1, \ldots, x_n$ преобразовывались между собой по формулам, аналогичным формулам (1), а преобразования других переменных производились бы по формулам, аналогичным формулам (2), так что два преобразования, которые одинаково преобразуют n первых переменных, также одинаково преобразовывали $r-n$ остальных.

101. Практическое построение голоэдрического продолжения заданной просто транзитивной группы. Покажем теперь, какой определенный процесс мы используем, чтобы выбрать параметры согласно предписаниям п. **100**.

Мы присоединяем ко всякой точке M области D преобразование S_M группы G, переводящее точку A в точку M. Пусть теперь S — некоторое преобразование группы G, M — точка, получаемая из A в результате этого преобразования; преобразование $S_M^{-1}S$ переводит A в M, а затем M в A; оно принадлежит, следовательно, подгруппе g преобразований группы G, оставляющих точку A неподвижной; преобразование S может быть, следовательно, представлено одним и только одним способом в виде $S = S_M g$.

Установив это, чтобы согласоваться с п. **100**, достаточно выбрать в качестве параметров S координаты $x_1, \ldots, x_n$ точки M и параметры $u_1, \ldots, u_{r-n}$, которые определяют различные преобразования подгруппы g, сохраняющие неподвижной точку A.

102. Примеры. *Группа движений на плоскости.* Выберем за преобразование S_M перенос $\overrightarrow{AM}$ и за параметр вращений g, оставляющих неподвижной точку A, угол c этих вращений. Следовательно, преобразование S_M будет иметь уравнения

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0,$$

вращения g — уравнения

$$x' = x\cos c - y\sin c,$$

$$y' = x\sin c + y\cos c.$$

Наиболее общее преобразование S группы с параметрами $(x_0, y_0; c)$ имеет уравнения

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos c - y\sin c + x_0, \\ y' &= x\sin c + y\cos c + y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Оно преобразует репер $(x, y; u)$ в репер $(x', y'; u')$, определяемый формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos c - y\sin c + x_0, \\ y' &= x\sin c + y\cos c + y_0, \\ u' &= u + c. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Группа линейных подстановок: $x' = ax + b$ $(b > 0)$. Выберем за преобразование S_M перенос $\overrightarrow{AM}$, а за параметр гомотетий, которые сохраняют точку A неподвижной, коэффициенты этих гомотетий.

Преобразование S_M, следовательно, будет иметь уравнение $x' = x + x_0$, а подгруппа g — уравнение $x' = ax$.

Отсюда получаем уравнение преобразования S группы, параметрами которого служат x_0 и a:

$$x' = ax + x_0. \tag{5}$$

Оно преобразует репер $(x; u)$ в репер $(x'; u')$, определяемый уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + x_0, \\ u' &= au. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Группа гомографических подстановок: $x' = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$, $(ab' - a'b > 0)$.

Выберем в качестве уравнения преобразований S_M уравнение

$$x' = x + x_0,$$

а в качестве уравнения преобразований подгруппы g — уравнение

$$x' = \frac{x}{\beta x + \alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

Следовательно, преобразованием группы с параметрами x_0, α, β будет постановка

$$x' = \frac{x}{\beta x + \alpha} + x_0. \tag{7}$$

Она преобразует репер $(x; u, v)$ в репер $(x'; u', v')$, определяемый формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\beta x + \alpha} + x_0, \\ u' &= \frac{u}{\alpha}(\beta x + \alpha)^2, \\ v' &= \frac{v}{\alpha}(\beta x + \alpha)^2 + \frac{\beta}{\alpha}(\beta x + \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

103. Рассмотрим теперь интранзитивную группу G с p инвариантами, которая действует в области D и определяющие уравнения которой

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \tag{1}$$

будут аналитическими. Пусть δ — аналитические многообразия, каждое из которых образовано множеством образов одной точки области D; мы научились определять эти многообразия в п. **94** (стр. 199). Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ — параметры, позволяющие различать многообразия δ.

Проведем аналитическое многообразие λ_0, имеющее одну и только одну общую точку с каждым многообразием δ*. Пусть λ — преобразования многообразия λ_0.

Пример. Если G — группа вращений вокруг начала, многообразиями δ будут сферы с центрами в начале; за многообразия λ можно принять полупрямые, оканчивающиеся в начале.

Через каждую точку области D проходит, по крайней мере, многообразие λ; группа $G(\lambda)$ транзитивна и голоэдрически изоморфна группе G. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots$ параметры, позволяющие различать многообразия λ**. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1' = \psi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots; a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

уравнения, определяющие преобразования группы $G(\lambda)$.

Введем тогда новые объекты μ, каждый из которых образован из многообразия λ и одной из точек этого многообразия; назовем эту точку началом объекта μ. Интранзитивная группа $G(\mu)$ позволит нам сравнивать группы G и $G(\lambda)$. Чтобы определить объект μ, достаточно задать параметры $\xi_1, \xi_2, \ldots$ многообразия λ, которое составляет часть μ, и параметры $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ многообразия δ, которому принадлежит начало μ.

---

* В некоторых случаях может быть необходимым ограничиться частью области D, внутри которой существование многообразия λ_0 будет обеспечено; при этом ограничения рассуждений этой части будут строгими.

** Если хотят построить репер для группы G, то не стоит образовывать его с помощью конечного числа точек, принадлежащих произвольно выбранным многообразиям δ, которым, таким образом, придется тогда играть особую роль. Предпочтительнее образовать его с помощью конечного числа линий λ.

Определяющими уравнениями группы $G(\mu)$ будут уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1' = \psi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots; a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_1' = \zeta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Группа $G(\mu)$ оказывается, следовательно, группой $G(\lambda)$, продолженной присоединением тождественно преобразующихся переменных.

С другой стороны, можно выбрать за параметры объекта μ координаты $x_1, \ldots, x_n$ его начала и некоторое число подходящим образом выбранных других параметров $u_1, u_2, \ldots$. Если сравнить прежний выбор параметров $\xi_1, \ldots, \zeta_1, \ldots$ с новым выбором, то сейчас же получим, что все ζ_i будут функциями от $x_1, \ldots, x_n$. Определяющие уравнения $G(\mu)$ представятся теперь в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1' = \theta_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots; a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \tag{11}$$

и $G(\mu)$ оказывается голоэдрическим продолжением группы G. Эти два вида (10) и (11) определяющих уравнений $G(\mu)$ доказывают, что интранзитивная группа G допускает голоэдрическое продолжение в группу, подобную транзитивной группе $G(\lambda)$, которая сама голоэдрически продолжена присоединением тождественно преобразующихся переменных. Но, в силу предыдущего пункта, $G(\lambda)$ обладает голоэдрическим продолжением, подобным ее группе параметров, которая та же, что и у G. Мы приходим таким образом к следующему заключению:

Всякая интранзитивная группа G с p инвариантами может быть голоэдрически продолжена так, что получится группа, подобная группе параметров, продолженной присоединением p тождественно преобразующихся переменных.

Примечание. Эти p новых переменных могут быть рассмотрены как p функций переменных, преобразуемых группой G.

104. Пример. Пусть дана интранзитивная группа G с двумя параметрами и двумя переменными:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Линиями δ служат прямые $x=\text{const}$; за λ_0 выберем прямую $y=0$. При преобразовании (1′) она переходит в прямую

$$y' = ax' + b.$$

Прямая λ является, следовательно, произвольной прямой плоскости, не параллельной оси y.

Пусть дана одна такая прямая $y=\xi x+\eta$; преобразование (1′) переводит ее в прямую

$$y' = \xi x' + \eta + ax' + b.$$

Группа $G(\lambda)$, следовательно, имеет уравнения

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta + b. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Группа $G(\lambda)$ поэтому подобна группе переносов на плоскости; объект μ может быть выделен с помощью тангенциальных координат (ξ, η) прямой λ и абсциссы ζ его начала; тогда группа $G(\mu)$ имеет уравнения

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta + b, \\ \zeta' &= \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

Группа $G(\mu)$ оказывается, следовательно, группой переносов на плоскости, продолженной присоединением одной тождественно преобразующейся переменной. С другой стороны, можно выбрать в качестве параметров объекта μ координаты (x, y) его начала и угловой коэффициент ξ прямой λ, которая составляет часть μ. Уравнения (1′) и первое уравнение (10′) дают нам тогда уравнения $G(\mu)$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + ax + b, \\ \xi' &= \xi + a; \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

группа $G(\mu)$ является голоэдрическим продолжением группы G.

Формулы, позволяющие перевести (10′) в (11′), имеют вид:

$$x = \zeta, \qquad y = \xi\zeta + \eta.$$

В этом случае группа $G(\lambda)$ просто транзитивна и, следовательно, подобна группе параметров. Формулы (9′) доказывают также, что группа $G(\lambda)$ тождественна с группой параметров, если в качестве преобразований группы выбраны a и b.

Глава VIII

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОНЕЧНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ГРУППЫ

Введение

105. Напомним результаты, сформулированные на стр. 183 и 186: группа параметров оставляет инвариантными относительные компоненты $\omega_p(\xi, d\xi)$, и это свойство характеризует преобразования этой группы. Целью настоящей главы является комбинация этого результата с результатом предыдущей главы. Мы получим таким образом процесс *, позволяющий вывести уравнения в частных производных, которые характеризуют преобразования данной конечной и непрерывной группы.

Будем предполагать, что наиболее общее преобразование группы определяется n аналитическими функциями, зависящими от n переменных и r параметров:

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

I. СЛУЧАЙ ПРОСТО ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ

106. Теорема. *Характеристическим свойством просто транзитивной группы является свойство оставлять инвариантными $n(=r)$ форм Пфаффа $\omega_i(x, dx)$.*

* Этот процесс позволит осуществить операцию, именем которой этот процесс называется: «Метод исключения констант». Но мы используем все упрощения, вытекающие из того факта, что рассматриваемые преобразования образуют группу.

В самом деле, просто транзитивную группу можно отождествить с ее группой параметров (см. п. **99**, стр. 204).

Приложение. Пусть дана просто транзитивная группа, зависящая от одного параметра. Ее преобразования, следовательно, определяются дифференциальным уравнением

$$\alpha(x')\,dx' = \alpha(x)\,dx.$$

Отсюда, обозначая через $\varphi(x)$ первообразную функции $\alpha(x)$ и через a параметр, получим:

$$\varphi(x') = \varphi(x) + a.$$

Следовательно, замена координат $y=\varphi(x)$ позволяет привести определяющее уравнение группы к виду $y'=y+a$. Этот факт выражают, говоря, что *всякая однопараметрическая просто транзитивная группа подобна группе переносов на прямой.*

Дополнение. Пусть даны область n измерений $x_1, \ldots, x_n$ и n форм Пфаффа $\omega_1(x, dx), \ldots, \omega_n(x, dx)$. Множество взаимно однозначных преобразований этой области, оставляющих эти n форм инвариантными, очевидно, образует группу: каждое преобразование этого множества допускает обратное преобразование, принадлежащее этому же множеству, и произведение двух преобразований множества есть преобразование того же множества, так как уравнения

$$\omega_i(x, dx) = \omega_i(x', dx'), \quad \omega_i(x', dx') = \omega_i(x'', dx'')$$

влекут за собой

$$\omega_i(x, dx) = \omega_i(x'', dx'').$$

Но число параметров r, от которых зависит эта группа, может быть меньше n.

На стр. 187 мы уже по этому поводу приводили пример: группа, оставляющая инвариантными формы $\omega_1 = \dfrac{dx_1}{x_2}$ $\omega_2 = dx_2$, есть группа, зависящая от одного параметра:

$$x_1' = x_1 + a, \qquad x_2' = x_2.$$

107. Определение инвариантных форм Пфаффа. Мы хотим определить из определяющих уравнений (1) просто транзитивной группы формы Пфаффа, которые эта группа оставляет инвариантными. В этих уравнениях мы имеем $n=r$. Применим общий метод построения дифференциальных уравнений, который называется методом исключения постоянных: пусть даны две произвольные точки $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(X_1, \ldots, X_n)$

и пусть S_a — преобразование, переводящее первую из этих точек во вторую:

$$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n). \tag{2}$$

Параметры a_i остаются неизменными при бесконечно малом изменении x_i; приращения правых частей уравнения (2) можно записать в виде

$$dX_i = \frac{\partial\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1} dx_1 + \\ + \ldots + \frac{\partial\varphi_i(x_1, \ldots . x_n; a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n} dx_n. \tag{3}$$

Так как группа просто транзитивна, параметры a_i можно выразить через x_i и X_i ; внесем эти выражения в (3); тогда получим:

$$dX_i = \alpha_{i1}(X_1, \ldots, X_n;\ x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \\ + \ldots + \alpha_{in}(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{4}$$

Система * может быть представлена в виде

$$\omega_i(X, dX) = \omega_i(x, dx).$$

Это не очевидно, и мы не должны этому удивляться, ибо мы не можем использовать предположения, что преобразования (2) образуют группу.

Рассмотрим третью точку $(x'_1, \ldots, x'_n)$; пусть, как и раньше, $(x'_1 + dx'_1, \ldots, x'_n + dx'_n)$ — координаты образа точки $(X_i + dX_i)$ при преобразовании, которое переводит точку (X_i) в точку (x'_i).

Имеем:

$$dX_i = \alpha_{i1}(X_1, \ldots, X_n;\ x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_1 + \\ + \ldots + \alpha_{in}(X_1, \ldots, X_n;\ x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_n. \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) дают

$$\alpha_{i1}(X_1, \ldots, X_n;\ x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \\ + \ldots + \alpha_{in}(X_1, \ldots, X_n;\ x_1, \ldots, x_n)\, dx_n =$$

* Эта система эквивалентна уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \alpha_{ik}(X_1, \ldots, X_n; x_1, \ldots, x_n).$$

$$= \alpha_{i1}(X_1, \ldots, X_n, x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_1 +$$

$$+ \ldots + \alpha_{in}(X_1, \ldots, X_n; x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_n.$$

Таким образом, поскольку точка (X_i) раз и навсегда произвольно выбрана, r независимых линейных форм

$$\alpha_{i1}(X_1, \ldots, X_n;\ x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 +$$

$$+ \ldots + \alpha_{in}(X_1, \ldots, X_n;\ x_1, \ldots, x_n)\, dx_n$$

будут инвариантными при преобразовании, переводящем точку (x_i) в точку (x'_i), т. е. при каждом преобразовании группы.

Мы собираемся не только изучить, как вычисляются инвариантные формы, но мы хотим также дать второе доказательство их существования; это доказательство очень легко может быть обобщено.

Замечание. Правило вычисления этих форм следует также из применения подвижных реперов и из рассуждений, которые не будут существенно отличаться от предыдущих.

Предположим, как и в п. **99** (стр. 204), что репер R_0 образован одной точкой A. Обозначим через (X_i) координаты этой точки. Компоненты $\omega_i(x, dx)$ являются не чем иным, как координатами точки $(x_i + dx_i)$ относительно репера, образованного точкой (x_i). Пусть a_i — параметры преобразования S_a, переводящего репер (x_i) в репер $R_0 \equiv A$. Пусть $(X_i + dX_i)$ — образ точки $(x_i + dx_i)$ при преобразовании S_a. Имеем:

$$dX_i \equiv \omega_i(x, dx);$$

но

$$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n),$$

$$dX_i = \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1}\, dx_1 +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Формы $\omega_i(x, dx)$, инвариантные при преобразованиях группы, получаются, следовательно, если разрешить уравнения (2) относительно a_i и подставить полученные значения в правые части уравнений (3).

Пример. Пусть дана группа преобразований

$$x' = ax \qquad (a > 0);$$

тогда уравнения (2) и (3) запишутся в виде

$$X = ax, \qquad dX = adx.$$

Исключение a дает $dX = X \frac{dx}{x}$. Выберем $X = 1$. Тогда мы получим инвариантную форму $\frac{dx}{x}$.

Действительно, очевидно, что дифференциальное уравнение $\frac{dx'}{x'} = \frac{dx}{x}$ и существование соотношения $x' = ax$ эквивалентны.

II. СЛУЧАЙ ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ

108. Предварительные замечания. Предположим, что параметры выбраны так, как указано в п. **100** (стр. 204) предыдущей главы, а именно: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_{r-n}$; группа параметров является голоэдрическим продолжением данной группы.

Преобразования группы параметров характеризуются свойством оставлять инвариантными относительные компоненты мгновенного перемещения подвижного репера; этими компонентами служат r форм Пфаффа

$$\omega_p(x, u, dx, du).$$

Напомним, что исходными для вычисления этих форм являются соотношения

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{p=1}^{r} \omega_p(a, da)\, X_p f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \delta x_j; \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p}\, da_p = \\ \displaystyle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_j}\, \delta x_j \\ (i = 1, \ldots, n). \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Рассмотрим сначала различные частные случаи.

Группа движений на плоскости [см. уравнения (3) предыдущей главы, стр. 206]. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x, u, dx, du) &= \cos u\,dx + \sin u\,dy, \\ \omega_2(x, u, dx, du) &= -\sin u\,dx + \cos u\,dy, \\ \omega_3(x, u, dx, du) &= du. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что уравнения

$$\omega_i(x, u, dx, du) = \omega_i(x', u', dx', du')$$

определяют преобразования группы параметров [уравнения (4) предыдущей главы].

Инвариантность третьего уравнения Пфаффа дает нам $du = du'$, откуда получаем $u' = u + c$, где c — произвольная постоянная.

Инвариантность форм ω_1 и ω_2 дает нам поэтому

$$dx' = \cos c\,dx - \sin c\,dy,$$
$$dy' = \sin c\,dx + \cos c\,dy,$$

откуда

$$x' = x\cos c - y\sin c + x_0,$$
$$y' = x\sin c + y\sin c + x_0.$$

Группа линейных подстановок [см. уравнения (5) предыдущей главы, стр. 207]. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x, u, dx, du) &= \frac{dx}{u}, \\ \omega_2(x, u, dx, du) &= \frac{du}{u}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Обратно, уравнения

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dx}{u}, \qquad \frac{du'}{u'} = \frac{du}{u}$$

дают

$$u' = au, \qquad x' = ax + x_0,$$

здесь a и x_0 — постоянные. Мы вновь нашли уравнения группы параметров [уравнения (6) предыдущей главы].

Группа гомографических подстановок [см. уравнения (7) предыдущей главы, стр. 207]. Имеем

$$\omega_1 = u\,dx, \quad \omega_2 = 2v\,dx - \frac{du}{u}, \quad \omega_3 = \frac{v^2}{u}dx - \frac{dv}{u}. \tag{9}$$

Постараемся показать с помощью непосредственных вычислений, что общий интеграл системы

$$u'\,dx' = u\,dx, \; 2v'\,dx' - \frac{du'}{u'} = 2v\,dx - \frac{du}{u},$$

$$\frac{v'^2}{u'}dx' - \frac{dv'}{u'} = \frac{v^2}{u}dx - \frac{dv}{u}$$

дается формулами (8) предыдущей главы.

Из соотношения

$$u'\,dx' = u\,dx$$

следует, что x' функции от x:

$$x' = f(x),$$

и поэтому

$$u' = \frac{u}{f'(x)}.$$

Инвариантность формы ω_2 дает нам теперь

$$v' = \frac{v}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{2f'^2(x)};$$

далее, инвариантность формы ω_3 дает уравнение, в которое входят только функция f и ее производные:

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2} = 0. \tag{10}$$

Функция

$$f(x) = \frac{x}{\beta x + \alpha} + x_0$$

удовлетворяет этому уравнению, каковы бы ни были постоянные x_0, α, β, и в то же время она является общим интегралом его ввиду того, что постоянные интеграции входят в этот общий интеграл.

Таким образом, снова установлены равенства (8) предшествующей главы.

Этот пример показывает, как дифференциальные уравнения преобразований группы могут быть выведены из форм ω_i. В конце этого раздела мы убедимся, что этот факт является общим.

Замечательно, что во всех предыдущих примерах мы получили n форм ω_p, содержащих только дифференциалы dx_i. Мы докажем, что этот результат справедлив во всех случаях.

109. Лемма. *Всегда можно образовать r различных линейных комбинаций с постоянными коэффициентами из форм ω_p, в которых не встречаются дифференциалы du_i.*

Действительно, рассмотрим абсолютный репер R_0; предположим, что его параметры будут равны $0, \ldots, 0$. Можно образовать n линейных комбинаций форм $\omega_p(0, 0, dx, du)$, которые содержат только дифференциалы dx_i. Будем предполагать, что именно этими комбинациями будут формы

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Тогда задание значений этих n первых форм равносильно заданию инфинитезимальных смещений начала репера R_0.

Формы $\omega_1(x, u, dx, du), \ldots, \omega_n(x, u, dx, du)$ можно, следовательно, рассматривать как относительные компоненты инфинитезимального смещения начала подвижного репера R; это смещение отнесено к данному реперу R. Эти формы обращаются в нуль, когда нет перемещения, т. е. когда равны нулю дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$. Они, следовательно, зависят только от дифференциалов* $dx_1, \ldots, dx_n$.

Дадим второе, более аналитическое изложение этих рассуждений. Пусть S_a — операция группы, которая преобразует репер R_0 в репер R. Рассмотрим произвольный репер, бесконечно близкий к реперу R_0; пусть $dx_1^0, \ldots, du_{r-n}^0$ — его параметры. Операция S_a преобразует его в репер с параметрами $x_1 + dx_1, \ldots u_{r-n} + du_{r-n}$. В силу инвариантности форм ω_i, имеем:

$$\ldots, \omega_p(0, 0, dx^0, du^0) = \omega_p(x, u, dx, du).$$

Отсюда следует, что система

$$dx_1^0 = 0, \ldots, dx_n^0 = 0,$$

которая, по условию, эквивалентна системе

$$\omega_1(0, 0, dx^0, du^0) = 0, \ldots, \omega_n(0, 0, dx^0, du^0) = 0,$$

эквивалентна равным образом системе

$$\omega_1(x, u, dx, du) = 0, \ldots, \omega_n(x, u, dx, du) = 0.$$

С другой стороны, из (1) следует, что

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(0, \ldots, 0; a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_k} dx_k^0;$$

система

$$dx_1^0 = 0, \ldots, dx_n^0 = 0,$$

следовательно, эквивалентна системе

$$dx_1 = 0, \ldots, dx_n = 0.$$

Окончательно, две системы

$$dx_1 = 0, \ldots, dx_n = 0$$

---

* В дальнейшем мы будем опускать выражение du в обозначениях этих форм.

и

$$\omega_1(x, u, dx, du) = 0, \ldots, \omega_n(x, u, dx, du) = 0$$

эквивалентны. Это доказывает, что в формах

$$\omega_1(x, u, dx, du), \ldots, \omega_n(x, u, dx, du)$$

встречаются только дифференциалы dx_i.

110. Лемма. *Если дифференциалы du_j не встречаются в n первых формах*

$$\omega_1(x, u, dx), \ldots, \omega_n(x, u, dx),$$

то или, по крайней мере, одна из этих форм существенно зависит от переменных u_j, или же рассматриваемая группа просто транзитивна.

Действительно, предположим, что формы

$$\omega_1(x, u, dx), \ldots, \omega_n(x, u, dx)$$

независимы от параметров u_j. Каждая операция группы преобразует величины x_i в такие величины x_i', что

$$\omega_i(x, dx) = \omega_i(x', dx') \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и эти n форм $\omega_i(x, dx)$ линейно независимы. Но мы доказали в п. 83 (стр. 186), что в пространстве n измерений существует, самое большее, одно преобразование, оставляющее инвариантными n линейно независимых форм и преобразующее одну заданную точку в другую заданную точку.

111. *Отступление.* Мы покажем теперь, как выбор параметров, указанный в п. 101 (глава VII, стр. 206) влечет за собой другие особенности форм ω_i. Но, по правде говоря, эти новые особенности имеют довольно маленькое значение.

Предположим, как и в п. 110, что формы

$$\omega_1(x, u, dx, du), \ldots, \omega_n(x, u, dx, du)$$

характеризуют инфинитезимальное относительное преобразование, которому подвергается начало подвижного репера R. Пусть, с другой стороны,

$$\overline{\omega}_1(x, dx), \ldots, \overline{\omega}_r(x, dx)$$

— относительные компоненты инфинитезимального преобразования, которому подвергается репер R_M, когда параметры x_i изменяются на dx_i: это параметры инфинитезимального преобразования $R_M^{-1} R_{M+dM}$.

Пусть теперь $S_M g_u$ — преобразование, которое переводит репер R_0 в репер с параметрами $(x; u)$, а $S_{M+dM} g_{u+du}$ — преобразование, ко-

торое переводит репер R_0 в репер с параметрами $(x+dx,\ u+du)$. Величины $\omega_i\ (x,\ u,\ dx,\ du)$ будут параметрами инфинитезимального преобразования

$$(S_M g_u)^{-1} S_{M+dM} g_{u+du} = g_u^{-1} S_M^{-1} S_{M+dM} g_{u+du}.$$

Это преобразование будет произведением двух следующих преобразований:

$$g_u^{-1} S_M^{-1} S_{M+dM} g_u, \quad g_u^{-1} g_{u+du};$$

его компонентами будут, следовательно, суммы компонент одного и того же индекса этих двух преобразований; но первое из указанных преобразований сопряжено к инфинитезимальному преобразованию $S_M^{-1}\ S_{M+dM}$ с параметрами $\overline{\omega}_i\ (x,\ dx)$ с помощью g_u^{-1}; его параметры будут, следовательно, иметь вид

$$\overline{\omega}_i\,(x,\ u,\ dx).$$

Что касается второго преобразования, его параметрами будут формы $\overset{*}{\omega}_i\,(u,\ du)$, и они существуют только для $i>n$.

Окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i\,(x,\ u,\ dx) &= \overline{\omega}_i\,(x,\ u,\ dx) \quad \text{для} \quad i \leqslant n, \\ \omega_i\,(x,\ u,\ dx,\ du) &= \overset{*}{\omega}_i\,(u,\ du) + \overline{\omega}_i\,(x,\ u,\ dx) \quad \text{для} \quad i > n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Таким образом, мы показали, что можно выбрать параметры так, чтобы x_i не были среди коэффициентов при du_j; этот факт мало важен. Интереснее отметить, что наше изложение учит нас находить формы $\omega_i\ (x,\ u,\ dx,\ du)$, если известны формы $\overline{\omega}_i\ (x,\ dx)$ и относительные компоненты $\overset{*}{\omega}_i\ (u,\ du)$ подгруппы g.

Группа плоских движений. Группой g будет группа

$$x' = x\cos u - y\sin u,$$
$$y' = x\sin u + y\cos u.$$

Отсюда выводится

$$\overset{*}{\omega}_3\,(u,\ du) = du.$$

В силу условий п. **102** (стр. 207), имеем:

$$\overline{\omega}_1\,(x,\ dx) = dx, \quad \overline{\omega}_2\,(x,\ dx) = dy, \quad \overline{\omega}_3\,(x,\ dx) = 0.$$

Отсюда (см. последний из примеров п. **69**, стр. 167—168)

$$\overline{\omega}_1\,(x,\ u,\ dx) = \cos u\, dx + \sin u\, dy,$$

$$\overline{\omega}_2\,(x,\ u,\ dx) = -\sin u\, dx + \cos u\, dy,$$

$$\overline{\omega}_3\,(x,\ u,\ dx) = 0.$$

Внося эти выражения в (11), получаем формулы (7) стр. 216.

Группа линейных подстановок. g есть подгруппа

$$x' = ux.$$

Имеем

$$\omega_2^*(u, du) = \frac{du}{u}.$$

В силу условий, указанных в п. 102, имеем:

$$\overline{\omega}_1(x, dx) = dx, \quad \overline{\omega}_2(x, dx) = 0,$$

откуда

$$\overline{\omega}_1(x, u, dx) = \frac{dx}{u}, \quad \overline{\omega}_2(x, u, du) = 0.$$

Уравнения (11) вновь приводят нас к формулам (8) стр. 216.

Группа гомографических подстановок. g есть подгруппа

$$x' = \frac{x}{vx + u}.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{x'} = u \cdot \frac{1}{x} + v.$$

Мы видим, что подгруппа g подобна группе линейных подстановок. Мы можем, следовательно, выбрать

$$\omega_2^*(u, du) = \frac{du}{u}, \quad \omega_3^*(u, du) = \frac{dv}{u}.$$

С другой стороны,

$$\overline{\omega}_1(x, dx) = dx, \quad \overline{\omega}_2(x, dx) = 0, \quad \overline{\omega}_3(x, dx) = 0.$$

Теперь легко получаем результат, эквивалентный формуле (9) (стр. 216).

112. Следствия лемм, установленных в пп. 109 и 110. Пусть дана непрерывная, конечная и транзитивная группа, определенная аналитическими уравнениями

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r). \tag{1}$$

Выберем параметры так, чтобы n форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$ зависели только от дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$; пусть

$$\omega_i(x, u, dx) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x, u)\, dx_k \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Предположим, что группа не является просто транзитивной; некоторые из коэффициентов α_{ik} зависят от параметров u; мы изменим, если необходимо, определение параметров u так, чтобы теми из них, от которых в действительно-

сти коэффициенты не зависят, были бы $u_{p+1}, \ldots, u_{r-n}$, и обратно, чтобы двум различным системам значений $u_1, \ldots, u_p$ всегда соответствовали две различные системы значений α_{ik}.

Найдем теперь, как группа оперирует над p величинами $u_1, \ldots, u_p$. Не стоит возвращаться к группе параметров и соотношениям, определяющим $u_1, \ldots, u_p$, исходя из первоначальных параметров. Для каждого преобразования S_a имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x, u)\, dx_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}(x', u')\, dx'_l,$$

откуда

$$\alpha_{ik}(x, u) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}(x', u') \frac{\partial \varphi_l(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_k}.$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно $u_1, \ldots, u_p$. Действительно, задание $\alpha_{ik}(x, u)$ определяет по условию значения $u_1, \ldots, u_p$; таким образом мы получаем

$$u_h = \Psi_h(x'_1, \ldots, x'_n;\ u'_1, \ldots, u'_p;\ a_1, \ldots, a_r) \quad (h = 1, \ldots, p). \tag{12}$$

Формулы (12) определяют $u_1, \ldots, u_p$ — преобразование переменных $x'_1, \ldots, x'_n$, $u'_1, \ldots, u'_p$ посредством S_a^{-1}.

П р и м е р ы. *Группа движений на плоскости.* Имеем:

$$\omega_1(x, u, dx) = \cos u\, dx + \sin u\, dy,$$
$$\omega_2(x, u, dx) = -\sin u\, dx + \cos u\, dy.$$

Пусть x, y при преобразовании S_a переходят в x', y':

$$x' = x\cos c - y\sin c + a,$$
$$y' = x\sin c + y\cos c + b.$$

Мы имеем:

$$\cos u\, dx + \sin u\, dy = \cos u' dx' + \sin u' dy',$$
$$-\sin u\, dx + \cos u\, dy = -\sin u' dx' + \cos u' dy',$$

отсюда

$$\cos u = \cos u' \frac{\partial x'}{\partial x} + \sin u' \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \sin u = \cos u' \frac{\partial x'}{\partial y} + \sin u' \frac{\partial y'}{\partial y},$$
$$\sin u = \sin u' \frac{\partial x'}{\partial x} - \cos u' \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \cos u = -\sin u' \frac{\partial x'}{\partial y} + \cos u' \frac{\partial y'}{\partial y},$$

т. е.

$$u = u' - c.$$

Группа гомографических преобразований. Мы имеем

$$\omega_1(x, u, dx) = \frac{dx}{u}.$$

Пусть x при преобразовании S_a переходит в x':

$$x' = \frac{x}{\beta x + \alpha} + x_0.$$

Тогда

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dx}{u},$$

откуда

$$u = \frac{u'}{\alpha}(\beta x + \alpha)^2.$$

Подсчитав таким образом формулы (12), рассмотрим транзитивную группу преобразований, определенную посредством уравнений (1) и (12); это будет голоэдрическое продолжение данной группы; она оперирует над $n+p$ переменными

$$x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_p.$$

Выберем для этой группы параметры так же, как и в п. **100**; пусть $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{r-n-p}$ — таким образом выбранные параметры. Существует $n+p$ линейных относительно дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_p$ форм, с коэффициентами в виде функций от x_i, u_h, v_l, которые эта продолженная группа оставляет инвариантными. Среди этих форм находятся $\omega_1(x, u, dx), \ldots, \omega_n(x, u, dx)$; пусть $\omega_1(x, u, v, dx, du), \ldots, \omega_p(x, u, v, dx, du)$ — p других форм. Представляются две возможности: или эти p последних форм будут независимыми от v_l и, в силу п. **110**, продолженная группа будет просто транзитивной, или же можно изменить выбор параметров v_l таким образом, что будут иметь место следующие обстоятельства: положим

$$\omega_k(x, u, v, dx, du) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}(x, u, v)\, dx_i + \sum_{h=1}^{p} \gamma_{kh}(x, u, v)\, du_h;$$

коэффициенты β_{ki} и γ_{kh} зависят только от q параметров v, скажем $v_1, \ldots, v_q$; двум различным системам значений $v_1, \ldots, v_q$ соответствуют всегда две различные системы значений этих коэффициентов. Подсчитаем, используя (1), (12) и инвариантность форм $\omega_k(x, u, v, dx, du)$, систему значений $v_1, v_2, \ldots, v_q$, зависящих от $x'_1, \ldots, x'_n$; $u'_1, \ldots, u'_p$; $v'_1, \ldots, v'_q$ и получаемых при преобразовании S_a^{-1} группы. Мы получим формулы, аналогичные формулам (12):

$$v_i = \theta_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ u'_1, \ldots, u'_p;\ v'_1, \ldots, v'_q,\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (13)$$

$$(i = 1, \ldots, q).$$

Транзитивная группа, определенная посредством уравнений (1), (12), (13), будет голоэдрическим продолжением двух предыдущих групп; она оперирует над $n+p+q$ переменными $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$. Она или подобна группе параметров, или уже примененный два раза процесс позволит продолжить ее в группу, оперирующую над еще большим числом переменных. Но число этих переменных не может превзойти числа r. Следовательно, в конце конечного числа таких продолжений получится группа, подобная группе параметров.

Таким образом, мы научились голоэдрически продолжать заданную транзитивную группу G, которая оперирует над n переменными $x_1, \ldots, x_n$ в просто транзитивную группу, которая оперирует над r переменными

$$x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_p;\ v_1, \ldots, v_q;\ \ldots;\ w_1, \ldots, w_s,$$

так что продолженная группа оставляет инвариантными r независимых форм, а именно

$$n \text{ форм } \omega_1(x, u, dx), \ \ldots, \ \omega_n(x, u, dx),$$

которые существенно изменяются при каждой вариации одного из параметров u;

$$p \text{ форм } \omega_1(x, u, v, dx, du), \ \ldots, \ \omega_p(x, u, v, dx, du),$$

которые существенно изменяются при каждой вариации одного из параметров v;

. . . .

$$s \text{ форм } \begin{cases} \omega_1(x, u, v, \ldots, w, dx, du, dv, \ldots, dw), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s(x, u, v, \ldots, w, dx, du, dv, \ldots, dw). \end{cases}$$

Эта просто транзитивная группа может быть выбрана как группа параметров группы G; так же, как эти операции преобразуют между собой переменные x_i, они преобразуют между собой переменные x_i и u_j, они преобразуют между собой переменные x_i, u_j, и $v_k, \ldots$; операции этой просто транзитивной группы характеризуются тем свойством, что оставляют инвариантными r форм

$$\omega_1(x, u, dx), \ldots, \omega_n(x, u, dx), \omega_1(x, u, v, dx, du), \ldots,$$

$$\omega_1(x, u, v, dx, du, dv), \ldots.$$

Замечание. В силу п. 83 (стр. 187), интегрирование некоторой системы дифференциальных уравнений позволяет построить уравнения (1), (12), (13), ..., исходя из r предыдущих форм. Первоначально кажется, что нельзя построить таким образом уравнений (1) группы, не получив уравнений (12), (13), ..., т. е. не построив в действительности уравнений группы параметров. Но это не так: следующий пункт покажет, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые входят в правые части уравнений (1), определяются системой уравнений в частных производных, в которых величины $u, v, \ldots, w$ отсутствуют.

113. Уравнения в частных производных, определяющие преобразования группы. Пусть дан переменный репер, зависящий только от параметров $x_1, \ldots, x_n$; предположим, например, что все остальные параметры постоянны и, чтобы упростить обозначения, будем считать их равными нулю. Этот переменный репер некоторой фиксированной операцией S_a группы G преобразуется в новый переменный репер с параметрами

$$x'_1, \ldots, x'_n, u'_1, \ldots, u'_p, \ldots, w'_1, \ldots, w'_s.$$

Имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_i(x', u', dx') = \omega_i(x, 0, dx),\\ \omega_h(x', u', v', dx', du') = \omega_h(x, 0, 0, dx, 0),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \omega_m(x', u', \ldots, w', dx', du', \ldots, dw') = \omega_m(x, 0, \ldots, 0, dx, 0, \ldots, 0)\\ \qquad (i = 1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, p;\ m = 1, \ldots, s).\end{array}\right\} \quad (14)$$

В силу п. **84** (стр. 187), существует не более одной системы функций

$$x_1', \ldots, x_n', u_1', \ldots, u_p', \ldots, w_1', \ldots, w_s'$$

от переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют этим уравнениям (14) и которые, когда все x_i равны нулю, равны системе r заданных чисел.

Таким образом, чтобы функции $x_1'(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, x_n'(x_1, \ldots, x_n)$ определяли некоторое преобразование группы G, необходимо и достаточно, чтобы можно было найти такие функции

$$u_1'(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_s'(x_1, \ldots, x_n),$$

чтобы удовлетворялись соотношения (14).

Замена обозначений позволит нам сформулировать этот результат следующим образом: чтобы функции $x_1'(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, x_n'(x_1, \ldots, x_n)$ определяли некоторое преобразование группы G, необходимо и достаточно, чтобы было можно найти $r—n$ таких других функций $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_s(x_1, \ldots, x_n)$, что имеют место соотношения:

$$\omega_i(x, u, dx, v) = \omega_i(x', 0, dx'), \tag{15$_1$}$$

$$\omega_h(x, u, v, dx, du) = \omega_h(x', 0, 0, dx', 0), \tag{15$_2$}$$

. . . .

$$\omega_m(x, u, \ldots, w, dx, du, \ldots, dw) = \omega_m(x', 0, \ldots, 0, dx', 0, \ldots, 0). \tag{15$_3$}$$

n соотношений (15_1) эквивалентны системе

$$\alpha_{ij}(x, u) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x', 0) \frac{\partial x_k'}{\partial x_j}; \tag{16$_1$}$$

p соотношений (15_2) эквивалентны системе

$$\beta_{hi}(x, u, v) + \sum_{k=1}^{p} \gamma_{hk}(x, u, v) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{hj}(x', 0, 0) \frac{\partial x_j'}{\partial x_i}. \tag{16$_2$}$$

. . . .

По условию уравнения (16_1) могут быть разрешены относительно $u_1, \ldots, u_p$; получится:

$$u_h = F_h\left(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n', \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x_n'}{\partial x_n}\right). \tag{17$_1$}$$

Разрешая так же уравнения (16_2) относительно $v_1, \ldots, v_q$, получим, что v_l равно известной функции переменных x_i, x_i', $\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u_h}{\partial x_i}$; принимая во внимание (17_1), получаем:

$$v_l = G_l\left(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n', \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_n'}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 x_n'}{\partial x_n^2}\right) \qquad (17_2)$$

. . . .

и т. д.

Заменим в выражениях (15_3) величины $u_h, v_l, \ldots, w_m$ их выражениями (17); мы получим систему уравнений, в которой фигурируют только функции $x_i'(x_1, \ldots, x_n)$ и их производные; эта система уравнений образует необходимое и достаточное условие, чтобы функции $x_i'(x_1, \ldots, x_n)$ определяли некоторое преобразование группы G; эту систему составляют *уравнения в частных производных преобразований группы* G; мы их будем называть, вместе с Софусом Ли, *определяющими уравнениями группы* G.

Примеры. *Группа плоских движений.* Формулы (7) (стр. 216) доказывают, что параметры x, y, u, использованные в этих формулах, удовлетворяют условиям, сформулированным в конце п. 112. Формулы (15) запишутся в виде

$$\cos u\, dx + \sin u\, dy = dx',$$
$$-\sin u\, dx + \cos u\, dy = dy',$$
$$du = 0,$$

формулы (16) — в виде

$$\cos u = \frac{\partial x'}{\partial x}, \quad \sin u = \frac{\partial x'}{\partial y}, \quad \sin u = -\frac{\partial y'}{\partial x},$$
$$\cos u = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Уравнениями в частных производных, определяющими перемещения, будут, следовательно, уравнения

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial x},$$
$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial y} = 0.$$

Группа линейных подстановок. Формулы (8) (стр. 216) показывают, что параметры x, u, использованные в этих формулах, удовлетворяют условиям, сформулированным в конце п. **112**. Формулы (15), если условиться выбирать не $u'=0$, а $u'=1$, запишутся в виде

$$\frac{dx}{u} = dx', \quad \frac{du}{u} = 0,$$

а формулы (16) дают

$$\frac{1}{u} = \frac{dx'}{dx}.$$

Дифференциальным уравнением, определяющим линейные подстановки, будет, следовательно, уравнение

$$\frac{d^2x'}{dx^2} = 0.$$

Группа гомографических подстановок. Формулы (9) (стр. 216) показывают, что параметры x, u, v удовлетворяют условиям, сформулированным в конце п. **112**. Если выбрать $u'=1$, $v'=0$, то формулы (15) запишутся в виде

$$u\,dx = dx', \quad 2v dx - \frac{du}{u} = 0, \quad \frac{v^2}{u}\, dx - \frac{dv}{u} = 0,$$

а формулы (16) дадут

$$u = \frac{dx'}{dx}, \quad v = \frac{1}{2u}\frac{du}{dx}.$$

Дифференциальным уравнением, определяющим гомографические подстановки, будет, следовательно, уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\left(\dfrac{d^2x'}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{dx'}{dx}\right)}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{d^2x'}{dx^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx'}{dx}\right)^2}.$$

Метод, с помощью которого мы строим таким образом уравнения данной группы, показывает, что *порядок* * *этой системы уравнений в частных производных равен числу серий* ** *переменных* u_i, v_l, ..., w_m *введенных в пункте* **112**: этот порядок равен 1 в случае просто транзитивной группы, 2 — в случае группы плоских перемещений и группы линейных подстановок, 3 — в случае группы гомографических подстановок.

III. СЛУЧАЙ ИНТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ

114. Напомним результат, полученный в п. **103** (стр. 208). Всякая интранзитивная группа G с p инвариантами может быть голоэдрически продолжена так, что получится

* Напомним, что этим порядком, по определению, является порядок наиболее высокой входящей в уравнение производной.

** u_1, ..., u_p образуют первую серию, v_1, ..., v_q — вторую и т. д.

группа, подобная группе параметров, которая сама продолжена присоединением p тождественно преобразующихся новых переменных; эти p новых переменных можно рассматривать как p функций переменных $x_1, \ldots, x_n$, преобразуемых группой G. Но группа параметров характеризуется свойством оставлять инвариантными r форм Пфаффа.

Следовательно, *интранзитивная группа с n переменными, r параметрами и p инвариантами характеризуется свойством оставлять инвариантными:*

p функций $y_1, \ldots, y_p$ переменных $x_1, \ldots, x_n$;

r форм Пфаффа $\omega_1(x, u, dx, du), \ldots, \omega_r(x, u, dx, du)$, в которые входят n переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $r+p-n$ вспомогательных переменных $u_1, \ldots, u_{r+p-n}$.

Замечание. Дифференциалы p инвариантов образуют p новых инвариантных форм Пфаффа, в которые входят $x_1, \ldots, x_n$, что доводит до $r+p$ число линейных независимых форм Пфаффа, которые группа оставляет инвариантными. r форм $\omega_i(x, u, dx, du)$ можно заменить произвольной системой r форм вида

$$\sum_{j=1,\ldots,n} a_{ij}(y)\,\omega_j(x, u, dx, du) + \sum_{l=1,\ldots,p} b_{il}(y)\,dy_l,$$

где $a_{ij}(y)$ и $b_{ij}(y)$ — произвольные функции от $y_1, \ldots, y_p$, но такие, что определитель из элементов $a_{ij}(y)$ отличен от нуля. Эти обстоятельства значительно отличаются от тех, которые мы имели для транзитивной группы.

Мы не станем углубляться в исследование тех дифференциальных условий, которые определяют группу, ибо изучение интранзитивной группы приводит к изучению транзитивных групп (см. п. **94**, стр. 199), и нам придется только повторять по поводу всякого многообразия δ содержание предыдущих пунктов.

Пример. Рассмотрим снова интранзитивную группу, изученную в п. **104** (стр. 210):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Мы знаем, что ее можно голоэдрически продолжить в группу

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + ax + b, \\ \xi' &= \xi + a \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

и что замена переменных

$$x = \zeta, \quad \eta = y - \xi x \tag{12'}$$

преобразует эту группу в подобную группу:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta + b, \\ \zeta' &= \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

Эта последняя группа будет группой параметров, продолженной с помощью тождественного преобразования. Уравнениями Пфаффа, которые группа параметров оставляет инвариантными, будут уравнения

$$\omega_1 = d\xi, \quad \omega_2 = d\eta.$$

Группа (1′), следовательно, характеризуется свойством оставлять инвариантными ζ, $d\xi$, $d\eta$.

Это система условий того же типа, что и условия, сформулированные в начале этого пункта. Запишем их, используя переменные x, y, ξ; получим:

инвариант: x;

инвариантные формы: $\omega_1 = d\xi$, $\omega_2 = dy - xd\xi - \xi dx$.

З а м е ч а н и е. Можно заменить форму ω_2 более простой формой

$$dy - \xi dx.$$

Легко проверить прямым подсчетом, что уравнения (1′) вытекают из этой системы условий.

Глава IX

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННОЙ АБСТРАКТНОЙ ГРУППЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДГРУПП ГРУППЫ

115. Введение. Предыдущая глава, которая относилась к определению группы системой дифференциальных соотношений, естественно привела нас к попытке преобразовать в проблему дифференциального и интегрального исчисления определение всех групп, представляющих данную абстрактную группу, — вопрос, которому мы уже посвятили раздел IV главы VI (стр. 200—203).

Проблемой дифференциального исчисления, с которой мы встретимся, будет выяснение того, когда система n уравнений Пфаффа с n переменными будет вполне интегрируема: решение этой проблемы, которая лежит в основе третьей части курса, будет только намечено в начале этой третьей части (п. **166**, стр. 289).

Проблемой интегрального исчисления будет определение интегральных многообразий вполне интегрируемой системы: мы знаем, что эта проблема сводится к интегрированию дифференциальных систем (см. п. **84**, Замечание I, стр. 187).

I. ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ ДАННУЮ АБСТРАКТНУЮ ГРУППУ

116. Построение транзитивных групп, представляющих данную абстрактную группу. Пусть дана абстрактная группа, т. е. группа параметров G. Мы будем предполагать ее опре-

деленной в области D пространства r измерений с помощью r аналитических уравнений

$$\xi'_p = \Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_r;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (p = 1, \ldots, r). \qquad (1)$$

Она характеризуется свойством оставлять инвариантными r форм

$$\omega_p(\xi, d\xi).$$

Пусть дана также транзитивная группа, изоморфная этой абстрактной группе.

(P) Мы предполагаем, что эта транзитивная группа действует в области D пространства n измерений $(n < r)$, что эта группа определяется посредством n аналитических уравнений

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \ (i = 1, \ldots, n)$$

и что ее подгруппа, оставляющая неподвижной некоторую точку области D, непрерывна *.

Известно, что транзитивная группа может быть голоэдрически продолжена с помощью введения новых переменных $u_1, \ldots, u_{r-n}$ в группу, подобную группе параметров G (п. **100**, стр. 204). Если заменить переменные $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ новыми переменными $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_{r-n})$, то всегда можно найти n различных линейных с постоянными коэффициентами комбинаций из форм ω_p таких, что в них не входят дифференциалы du_k (п. **109**, стр. 217). Эти n линейных комбинаций, приравненные нулю, очевидно, образуют вполне интегрируемую систему, интегральными многообразиями которой будут поверхности $x_i = \mathrm{const}$.

Следовательно, $x_1, \ldots, x_n$ *можно рассматривать как параметры, служащие для того, чтобы выделять интегральные многообразия вполне интегрируемой системы, полученной приравниванием нулю независимых, с постоянными коэффициентами линейных комбинаций форм* $\omega_p(\xi, d\xi)$.

Эта теорема дает нам аналитический процесс, позволяющий построить все транзитивные группы, обладающие тремя свойствами (P) и представляющие данную абстрактную группу.

117. Пусть, наоборот, дана такая вполне интегрируемая система, полученная приравниванием нулю некоторых известных линейных комбинаций с постоянными коэффициентами

---

* Другими словами, мы предполагаем, что точки области D будут ориентированными объектами (см. п. **93**, стр. 198).

из форм $\omega_p(\xi, d\xi)$. Группа G оставляет инвариантными формы $\omega_p(\xi, d\xi)$. Следовательно, она преобразует одни в другие интегральные многообразия V этой вполне интегрируемой системы; группа G транзитивно действует над классом объектов, который составляют эти многообразия. Возникают два вопроса: будет ли эта группа $G(V)$ преобразований многообразий V одни в другие определяться аналитическими уравнениями и будет ли она голоэдрически или мериэдрически изоморфна данной абстрактной группе G?

Рассмотрим сначала два частных случая.

Пример I. Рассмотрим группу движений. Ее группа параметров G оставляет инвариантными шесть форм ω_1, ω_2, ω_3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}.

Покажем, что система

$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{12} = 0$$

вполне интегрируема. Отыскание в пространстве параметров многообразий, вдоль которых эти три соотношения удовлетворяются, эквивалентно отысканию семейств триэдров, мгновенное вращение которых всегда равно нулю: эти семейства будут семействами триэдров с параллельными ребрами. Но многообразие, образованное всеми триэдрами, параллельными заданному триэдру, зависит от трех параметров. Это доказывает, что система

$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{12} = 0$$

вполне интегрируема; ее интегральными многообразиями будут различные многообразия V.

Группа $G(V)$ есть группа движений этих многообразий, которые остаются неизменными при всех переносах. $G(V)$, следовательно, будет не голоэдрически, а мериэдрически изоморфна G.

Пример II. Предположим, что область D, в которой определена группа параметров G, будет поверхностью тора. Координаты (ξ, η) каждой точки этого тора будут определены с точностью до $\pm 2k\pi$, поскольку координатными линиями будут параллели и меридианы. Предположим, что уравнениями группы G будут уравнения

$$\xi' = \xi + a, \quad \eta' = \eta + b.$$

Формами ω_p будут $d\xi$ и $d\eta$; всякая линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\alpha d\xi + \beta d\eta$, приравненная нулю,

будет вполне интегрируема; соответствующие многообразия V имеют уравнение $\alpha\xi+\beta\eta=\text{const}$.

Преобразования $\xi'=\xi-t\beta$, $\eta'=\eta+t\alpha$, которые зависят от одного параметра t, оставляют инвариантным каждое из этих многообразий V: группа $G(V)$, следовательно, может быть только мериэдрически изморфна группе G. Кроме того, когда $\frac{\beta}{\alpha}$ будет иррационально, каждое из этих многообразий проходит как угодно близко от каждой точки тора, и группа $G(V)$, следовательно, не может быть определена аналитическими уравнениями.

118. Различие между голоэдрическим и мериэдрическим изоморфизмом. Предположим, что вторая из трудностей, отмеченных в предыдущем пункте, не представляется: многообразие V не проходит бесконечное число раз через окрестность какой-либо точки области D. Тогда эти многообразия V, которые строятся в результате интегрирования дифференциальных аналитических* уравнений, будут также аналитическими.

Мы укажем, как определить, будет ли существующий между G и $G(V)$ изоморфизм голоэдрическим или мериэдрическим. Заменим параметры $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ такими параметрами $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_{r-n})$, чтобы многообразия V имели уравнения $x_1=\text{const}, \ldots, x_n=\text{const}$; предположим, кроме того, что $\omega_1, \ldots, \omega_n$ будут теми формами, приравнивание нулю которых определяет многообразия V; дифференциалы du_j отсутствуют в этих n формах.

Первый случай, который может представиться, следующий: переменные u_j также отсутствуют в этих n формах.

Если два многообразия $V^0(\overset{0}{x_i})$ и $V^1(\overset{1}{x})$ заданы, то существует преобразование группы G, переводящее заданную фиксированную точку $(\overset{0}{x_i}, \overset{0}{u_k})$ многообразия V^0 в некоторую точку $(\overset{1}{x_i}, \overset{1}{u_i})$ многообразия V^1. Преобразования группы G, которые преобразуют V^0 в V^1, зависят, следовательно, от $r-n$ параметров. Но каждое преобразование группы $G(V)$ оставляет инвариантными n линейно независимых форм $\omega_i(x, dx)$; следовательно, в этой группе существует самое большее одно преобразование, которое переводит V^0 в V^1 (п. 83; стр. 186). Значит, группа $G(V)$ просто транзитивна и, следовательно, мериэдрически изоморфна группе G.

Если предшествующий случай не представляется, то это

---

* См. п. 84. Замечание 1, стр. 188.

значит, что некоторые из форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$ в действительности зависят от некоторых параметров $u_1, \ldots, u_{r-n}$. Имеем:

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x, u)\, dx_k \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Мы изменим, если надо, выбор параметров u_j так, чтобы теми из них, от которых α_{ik} не зависят, были бы $u_{p+1}, \ldots, u_{r-n}$, и обратно, чтобы двум различным системам значений параметров $u_1, \ldots, u_p$ всегда соответствовали бы две различные системы значений коэффициентов α_{ik}. Определим, как группа действует над p величинами $u_1, \ldots, u_p$. Для этого достаточно использовать уравнения

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \tag{2}$$

которые показывают, как группа G преобразует переменные x_i; в самом деле, мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x, u)\, dx_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}(x', a')\, dx_l',$$

следовательно,

$$\alpha_{ik}(x, u) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}(x', u') \frac{\partial \varphi_l(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_k},$$

и результатом этих соотношений будут уравнения, которые показывают, как преобразуются переменные $u_1, \ldots, u_p$:

$$u_h = \Psi_h(x_1', \ldots, x_n';\ u_1', \ldots, u_p';\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (h = 1, \ldots, p). \tag{3}$$

Отметим также, что группа G преобразует между собой переменные $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_p$ и что всякая операция группы G, которая тождественно преобразует $x_1, \ldots, x_n$, преобразует тождественно и $u_1, \ldots, u_p$.

Пусть Γ_1 — группа преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_p$. Определение того, изоморфна ли группа $G(V)$ группе G, сводится к определению того, изоморфна ли группа Γ_1 [которая будет к тому же голоэдрическим продолжением группы $G(V)$] группе G. Однако группа Γ_1 оперирует над бо́льшим числом переменных, чем группа $G(V)$.

Далее с Γ_1 поступают так же, как поступали с группой $G(V)$: или Γ_1 просто транзитивна, или же ее можно голоэдрически продолжить в группу Γ_2, которая будет опериро-

вать над бо́льшим числом переменных $x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p; v_1, \ldots, v_q$.

Далее продолжаем применять рекуррентный процесс, который аналогичен тому процессу, который применялся в п. **112** (стр. 221—225). В конце концов мы придем к просто транзитивной группе Γ_α; если она содержит меньше r переменных, группа $G(V)$ будет мериэдрически изоморфна группе G; если она содержит r переменных, преобразования группы G, которые оставляют инвариантной каждую точку области, над которой оперирует Γ_α, образуют новую подгруппу группы G, которая уже не будет непрерывной; если эта подгруппа сводится к тождественному преобразованию, изоморфизм будет голоэдрическим.

II. ИНТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ ДАННУЮ АБСТРАКТНУЮ ГРУППУ

119. Построение интранзитивных групп, представляющих данную абстрактную группу. Пусть опять дана абстрактная группа G, определяемая аналитическими уравнениями; пусть $\omega_1(\xi, d\xi), \ldots, \omega_r(\xi, d\xi)$ — формы Пфаффа, которые она оставляет инвариантными. Пусть дана также интранзитивная группа Γ с p инвариантами, изоморфная группе G и также определяемая аналитическими соотношениями

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Продолжим группу G, присоединяя к ней p тождественно преобразующихся переменных $y_1, \ldots, y_p$; можно голоэдрически продолжить Γ, присоединяя переменные $u_1, \ldots, u_{r+p-n}$ так, чтобы получить группу, которая была бы тождественной (с точностью до подобия) с продолжением группы G; более того, $y_1, \ldots, y_p$ появляются как функции от $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть D — область $r+p$ измерений, над которой оперирует общее продолжение групп G и Γ; в этой области тем самым определяются две системы координат, а именно

$$(\xi_1, \ldots, \xi_r; y_1, \ldots, y_p) \quad \text{и} \quad (x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_{r+p-n}).$$

Мы будем рассматривать в области D:

1° многообразия V $r+p-n$ измерений, определяемые уравнениями $x_1 = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$ и преобразуемые группой между собой;

2° r-мерные многообразия δ, определяемые уравнениями $y_1 = \text{const}, \ldots, y_p = \text{const}$, оставляемые группой инвариантными и порождаемые многообразиями V;

3° p-мерное аналитическое многообразие λ_0, имеющее одну и только одну общую точку с каждым многообразием δ (см. п. **103**, стр. 208); координат $y_1, y_2, \ldots, y_p$ достаточно для того, чтобы охарактеризовать точку многообразия λ_0.

Построим в каждой точке многообразия λ_0 n зависящих от $\xi_j, y_l, d\xi_j, dy_l$ форм Пфаффа, которые линейно независимы и обращаются в нуль, когда смещения $d\xi_j$, dy_l расположены на многообразии V, проходящем через рассматриваемую точку. Выберем p из этих форм равными дифференциалам $dy_1, \ldots, dy_p$, а остальные $n-p$ вида

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant r} \alpha_{is}(y)\, \omega_s(\xi, d\xi). \tag{4}$$

Операции группы оставляют инвариантными эти n форм, которые равны нулю вдоль каждого из многообразий V. Этот результат представляет обобщение для случая интранзитивных групп теоремы, которую мы сформулировали в п. **116** (стр. 231).

Многообразия V образуют интегральные многообразия вполне интегрируемой системы Пфаффа, полученной приравниванием нулю p дифференциалов dy_l и $n-p$ форм Пфаффа вида (4).

120. Пусть, обратно, дана такая система. Группа преобразует одни многообразия V в другие, потому что она оставляет инвариантными формы ω_p и переменные y_l; через каждую точку области D проходит одно многообразие V; инвариантные многообразия δ могут порождаться вместе с многообразиями V. Группа преобразований многообразий V между собой будет, следовательно, интранзитивной группой с p инвариантами, которая голоэдрически или мериэдрически изоморфна группе G. Но мы не можем быть уверенными, что она будет аналитической. Если она аналитическая, то с помощью процесса, аналогичного процессу п. **118**, можно узнать, будет ли она действительно изоморфна группе G.

Пример. Предположим, что G будет группой переносов

$$\xi_1' = \xi_1 + a_1, \ldots, \xi_r' = \xi_r + a_r. \tag{1'}$$

Эта группа будет группой параметров. Формы $\omega_s(\xi, d\xi)$ будут дифференциалами $d\xi_s$. Вся система

$$dy_1 = 0, \quad \alpha_{1,1}(y)\, d\xi_1 + \ldots + \alpha_{1,r}(y)\, d\xi_r = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dy_p = 0, \quad \alpha_{n-p,1}(y)\, d\xi_1 + \ldots + \alpha_{n-p,r}(y)\, d\xi_r = 0$$

вполне интегрируема.

Уравнения интегральных многообразий V имеют вид:

$$y_1 = \text{const}, \quad \alpha_{1,1}(y)\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{1,r}(y)\,\xi_r = \text{const},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p = \text{const}, \quad \alpha_{n-p,1}(y)\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{n-p,r}(y)\,\xi_r = \text{const}.$$

Входящие в эти уравнения n констант служат для того, чтобы выделять многообразия V. Обозначим эти константы через $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots x_n$. Преобразование (1′) преобразует многообразие V с параметрами $(x_1, \ldots, x_n)$ в многообразие V' с параметрами

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= x_1, \\
&\cdots\cdots \\
x'_p &= x_p, \\
x'_{p+1} &= x_{p+1} + \alpha_{1,1}(x_1, \ldots, x_p)\,a_1 + \ldots + \alpha_{1,r}(x_1, \ldots, x_p)\,a_r, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x'_n &= x_n + \alpha_{n-p,1}(x_1, \ldots, x_p)\,a_1 + \ldots + \alpha_{n-p,r}(x_1, \ldots, x_p)\,a_r.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Следовательно, всякая интранзитивная группа с p инвариантами, уравнения которой являются аналитическими, а группой параметров служит группа переносов (1′), подобна группе типа (2′).

121. Замечание об аналитической природе представлений абстрактной группы. Выше мы предположили, что функции $\alpha_{i,j}$ аналитические; но если в формулах (2′) выбирать в качестве функций $\alpha_{i,j}$ абсолютно произвольные функции, то получим еще одно представление группы переносов (1′). Таким образом, можно построить примеры интранзитивных групп, которые представляют аналитическую абстрактную группу, но сами не являются ни аналитическими, ни подобными какой-нибудь аналитической группе. Наоборот, проведенное нами изучение групп, представляющих абстрактную аналитическую группу, позволяет установить следующую теорему:

Всякая транзитивная группа, определяющие уравнения которой непрерывны и которая представляет абстрактную аналитическую группу, подобна группе, определяющие уравнения которой аналитические.

III. ДОПОЛНЕНИЯ

122. Предварительные замечания. В этой главе мы установили следующий результат (см. п. **116**, стр. 231 и п. **119**, стр. 236). Пусть дана абстрактная группа G; всякий класс ориентированных объектов, которые она преобразует аналитическими операциями, эквивалентен классу объектов, построенных с помощью ν-мерных интегральных многообразий вполне интегрируемой системы, полученной приравниванием нулю $r-\nu$ линейных комбинаций форм Пфаффа $\omega_1, \ldots, \omega_r$; эти комбинации имеют постоянные коэффициенты, если группа G оперирует над классом транзитивно; в противном случае в эти комбинации входят параметры (инварианты $y_1, \ldots, y_p$). Этот результат надо сравнить с заключениями пп. **95** и **96** (стр. 200 и 201): это сравнение подсказывает, что многообразия, о которых мы будем говорить, тождественны многообразиям, образующим объекты «тела». Мы установим это тождество, доказав две теоремы (прямую и обратную) в пп. **123** и **124**.

Чтобы рассуждать в геометрической форме и подготовить следующую главу, вспомним, что точка ξ пространства параметров есть образ не только преобразования S_ξ, но также и репера $R_\xi = S_\xi R_0$; многообразие, которое образует объект некоторого тела, есть образ семейства реперов, присоединенных к этому объекту; многообразие, вдоль которого одна из форм Пфаффа ω_p равна нулю, есть образ семейства реперов, инфинитезимальные смещения которых внутри этого семейства обращают в нуль компоненту ω_p.

Напомнив это, докажем две указанные теоремы.

123. Теорема. *Рассмотрим семейство реперов R, присоединенных к некоторому объекту*; предположим, что это семейство зависит аналитически от ν параметров. Я утверждаю, что существует точно $r-\nu$ линейно независимых компонент ω_p инфинитезимальных смещений этих реперов, которые обращаются в нуль, когда эти смещения происходят внутри семейства.*

Компоненты ω_p мгновенного смещения репера семейства зависят от ν переменных; следовательно, можно построить из них $r-\nu$ линейно независимых комбинаций с постоянными коэффициентами, которые обращаются в нуль для некоторого положения R_1 репера R; предположим, что этими комбинациями будут формы $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_r$. Пусть R_2 — второй репер семейства: $R_2 = S R_1$; если S остается фиксированным, мы

* Ср. п. **93**, стр. 198.

будем бесконечно мало изменять репер R_1 внутри семейства, тогда репер R_2 также будет бесконечно мало изменяться внутри семейства, и его бесконечно малые относительные смещения будут тождественны бесконечно малым относительным смещениям R_1; следовательно, все компоненты $\omega_{\nu+1}, \ldots, \omega_r$ будут равны нулю для этого смещения репера R_2, ч. т. д.

124. Обратная теорема. *Предположим, что семейство реперов аналитически зависит от ν параметров и что $r-\nu$ линейно независимых компонент относительных мгновенных смещений реперов этого семейства будут тождественно равны нулю. Тогда*

1° *система, полученная обращением в нуль этих $r-\nu$ компонент, вполне интегрируема;*

2° *семейство реперов будет семейством, присоединенным к одному из объектов, над которыми оперирует группа.*

Действительно, образы реперов этого семейства при преобразованиях группы обладают тем же свойством: их изображения в пространстве параметров образуют многообразия ν измерений, вдоль которых обращаются в нуль $r-\nu$ рассматриваемых компонент; через каждую точку проходит одно из этих многообразий: следовательно, система, полученная обращением в нуль этих $r-\nu$ рассматриваемых компонент,— вполне интегрируема; невозможно *, чтобы два из этих многообразий, т. е. два из этих семейств реперов, имели общий элемент. Из последнего вытекает, что преобразования группы, которые переводят друг в друга реперы заданного семейства, преобразуют это семейство само в себя; это свойство характеризует семейства, присоединенные к объектам, которые преобразует группа.

125. Заключение. «Тело» образуется многообразиями, образами подгрупп группы G в пространстве параметров, и преобразованиями этого многообразия (п. **95**).

Две предыдущие теоремы имеют, следовательно, важные следствия.

Теорема. *Чтобы многообразие ν измерений пространства параметров, проходящее через начало **, было образом подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы $r-\nu$ независимых линейных комбинаций с постоянными коэффициентами из форм $\omega_p(\xi, d\xi)$ были постоянно равны нулю вдоль этого многообразия; тогда система, получаемая обращением в нуль этих $r-\nu$ комбинаций, вполне интегрируема.*

---

* В силу теоремы п. **81**, стр. 183.

** Образ тождественного преобразования.

Глава X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

126. Введение. Пусть дана конечная и непрерывная группа, оперирующая над точками области D *. Мы ставим задачей реперировать ** элементы касания различных порядков многообразий λ измерений V_λ, проведенных в области D. Мы знаем, что теоретически возможно выполнить эту операцию (глава IV, раздел III). Мы изложим «Метод подвижного репера», который позволит выполнить эту операцию практически.

Этот метод является обобщением метода подвижного трехгранника, который мы прилагали в первой части курса к различным частным случаям ***, когда группа G была группой движений. Метод подвижного репера основан на изучении относительных компонент подвижных реперов; следовательно, он тесно связан со свойствами группы параметров, значение которой, как мы знаем, фундаментально.

Как только реперирование элементов касания будет выполнено, решаются *проблемы касания*. Это реперирование составляет также первый шаг в решении *проблемы равен-*

* Вообще над объектами или элементами «тела». В этом случае то, что мы обозначаем в этом разделе словом «точка» следует понимать как элемент рассматриваемого тела. Мы уже рассматривали с этой точки зрения (главы III и IV) теорию линейчатых поверхностей, рассматриваемых как многообразия прямых (под этим названием они будут многообразиями одного измерения).

** См. пп. **93** и **94**, стр. 198—199.

*** Читателю следует восстановить в памяти наиболее сложный из этих случаев, который изложен в главе IV, стр. 141—152.

ства: определении того, существуют ли преобразования группы G, которые налагают два заданных в области D многообразия. Наконец, отметим, что *проблемы наложения** одного многообразия на другое немедленно решаются, если предварительно изучены методом подвижного репера, элементы касания двух многообразий.

127. Изложение свойств, накладываемых на реперы и на инварианты различных порядков. Подчиним некоторым условиям решение проблемы реперирования, которую мы только что поставили. В этом пункте мы изложим эти условия; в конце п. **129** станет очевидно, что мы эти условия будем соблюдать.

К точке A многообразия V_λ пусть будет присоединено бесконечное множество семейств реперов: реперы порядка $0, \ldots$, реперы порядка $p, \ldots$; каждое из этих семейств содержит следующее** за ним.

К точке A, сверх того, будет присоединена последовательность чисел: μ_0 инвариантов порядка $0, \ldots, \mu_p - \mu_{p-1}$ инвариантов порядка $p, \ldots$.

Элемент касания порядка p точки A многообразия V_λ будет реперирован с помощью семейства реперов порядка p этой точки и с помощью множества инвариантов порядков $\leqslant p$ этой точки.

Другими словами, всякий репер, присоединенный к элементу касания порядка $p+1$, составляет часть совокупности реперов, присоединенных к элементу касания порядка p; всякий инвариант, присоединенный к элементу касания порядка p, составляет часть совокупности инвариантов, присоединенных к элементу касания порядка $p+1$.

Выбранный способ реперирования с очевидностью показывает, что условия касания порядка p включаются в условие касания порядка $p+1$.

Семейство реперов порядка p точки A многообразия V_λ может быть не непрерывным: оно распадается тогда на несколько непрерывных подсемейств. Система инвариантов порядков $\leqslant p$ и каждое из этих подсемейств образуют, по определению***, *ориентированный элемент касания порядка p*. Всякий элемент касания разлагается, таким образом, на некоторое число ориентированных элементов касания.

Пусть задан некоторый ориентированный элемент касания порядка p; его наиболее общий репер порядка p зависит от ν_p параметров, которые мы будем называть *вторичными па-*

---

* Несколько слов о проблемах наложения мы скажем в п. **196** (стр. 333).

** Или совпадает с ним.

*** См. п. **93**, стр. 198.

раметрами порядка р. В силу теоремы п. **123** (стр. 239), инфинитезимальные смещения этого репера характеризуются свойством обращать в нуль $r-\nu_p$ относительных компонент. Точнее, инфинитезимальные смещения наиболее общего репера порядка $p-1$, присоединенного к заданному элементу касания, обращают в нуль $r-\nu_{p-1}$ независимых линейных комбинаций форм $\omega_1, \ldots, \omega_r$; инфинитезимальное смещение репера порядка p обращает в нуль эти $r-\nu_{p-1}$ линейных комбинаций и $\nu_{p-1}-\nu_p$ других линейных комбинаций

$$\pi_\alpha = \sum_{p=1}^{r} a_{\alpha p}\omega_p \quad (r-\nu_{p-1} < \alpha \leqslant r-\nu_p); \tag{1}$$

мы будем называть эти последние *главными компонентами порядка р.* Коэффициенты $a_{\alpha p}$ предполагаются постоянными или функциями инвариантов порядков $\leqslant p$; это предположение законно, ибо задание этих инвариантов определяет природу рассматриваемых нами инфинитезимальных смещений. Рассмотрим наиболее общий элемент касания нулевого порядка, т. е. какую-нибудь точку A из области D. В силу заключений п. **109** (стр. 207), дифференциалы координат точки A будут линейными комбинациями главных компонент нулевого порядка и дифференциалов инвариантов нулевого порядка. Рассмотрим переменную точку A на многообразии V_λ; будем называть *главными параметрами* те параметры, от которых зависят точки многообразия V_λ. Дифференциалы главных параметров, следовательно, будут линейными комбинациями λ форм, которые надлежащим образом выбраны из главных компонент нулевого порядка, и дифференциалов инвариантов нулевого порядка; мы упростим обозначения, предполагая, что этими λ формами будут λ первых главных компонент нулевого порядка, которые мы будем обозначать через

$$\pi_1, \ldots, \pi_\lambda.$$

Рассмотрим репер, который меняется, оставаясь постоянно репером порядка p многообразия V_λ. Он зависит от λ главных параметров многообразия V_λ и ν_p вторичных параметров порядка p. По определению, его главные компоненты порядков $\leqslant p$ независимы от дифференциалов вторичных параметров; следовательно, они будут линейными комбинациями форм $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$. *Главные компоненты порядков $< p$ реперов порядка р многообразия V_λ будут линейными ком-*

бинациями форм $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ с коэффициентами в виде функций от инвариантов порядков $\leqslant p$. Инварианты будут функциями только главных параметров. Дифференциалы инвариантов порядков $< p$ будут линейными комбинациями форм $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ с коэффициентами в виде функций от инвариантов порядков $\leqslant p$.

Дифференциалы инвариантов порядка p и главные компоненты порядка p реперов порядка p многообразия V_λ будут также линейными комбинациями форм $\pi_1, \ldots, \pi$:

$$\left.\begin{aligned} dk_\alpha &= b_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + b_{\alpha\lambda}\pi_\lambda \, (\mu_{p-1} < \alpha \leqslant \mu_p), \\ \pi_\alpha &= b'_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + b'_{\alpha\lambda}\pi_\lambda \, (r - \nu_{p-1} < \alpha \leqslant r - \nu_p). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Коэффициенты $b_{\alpha\beta}$, $b'_{\alpha\beta}$ — функции инвариантов порядков $\leqslant p$ и вообще вторичных параметров порядка p. Мы их будем называть *коэффициентами порядка p.*

128. Применение рекуррентного условия касания. По условию мы умеем реперировать точки области D, т. е. элементы касания нулевого порядка. Часто даже геометрическая интуиция позволяет выполнить реперирование элементов касания первого порядка. Это позволяет нам продолжать процесс рекуррентно.

Предположим, что нам удалось определить инварианты порядков $\leqslant p$ и реперы порядков $\leqslant p$, если свойства, изложенные в предыдущем пункте, выполняются для этих инвариантов, этих реперов и коэффициентов порядка p.

Применим следующее *условие касания:*

Чтобы два многообразия V_λ и $V_\lambda{}^*$ имели в точке A_0 касание порядка $\geqslant p+1$, необходимо и достаточно, чтобы каждой точке A многообразия V_λ, бесконечно близкой к точке A_0, соответствовала точка A^* многообразия $\overset{*}{V}_\lambda$, так, чтобы условия, выражающие, что многообразия V_λ и $\overset{*}{V}_\lambda$ имеют в точках A и A^* касание порядка $\geqslant p$, были удовлетворены с точностью до бесконечно малых, порядок которых выше, чем расстояние A_0A между точками A_0 и A.

Это условие принимает следующий вид:

Пусть даны два многообразия V_λ и $\overset{*}{V}_\lambda$ и две их соответствующие точки A_0 и $\overset{*}{A}_0$; предположим, что существует операция фундаментальной группы G, которая совмещает эти две точки, осуществляя между двумя многообразиями касание порядка $\geqslant p$. Чтобы существовала операция группы G, которая совмещает эти две точки и осуществляет касание порядка $\geqslant p+1$, необходимо и достаточно, чтобы можно бы-

ло выбрать в точках A_0 и A_0^* вторичные параметры порядка p таким образом, чтобы коэффициенты порядка p многообразий V_λ и $\overset{*}{V_\lambda}$ приняли одни и те же значения.

Это условие немедленно показывает, что реперы порядка p и инварианты порядков $\leqslant p$, рекуррентно определенные в этом пункте, позволяют реперировать элементы касания порядка p.

129. Механизм метода подвижного репера*. Мы предполагаем известными:

1° число инвариантов порядков $1, 2, \ldots, p$;

2° реперы порядков $1, 2, \ldots, p$;

3° главные компоненты порядков $<p$ [см. (1)], их выражения в виде функций от главных компонент $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядков $\leqslant p$, выражения дифференциалов инвариантов порядков $1, \ldots, p-1$ в виде функций от $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядка p. Аналогичные сведения относительно порядка $p+1$ мы получим следующим образом.

Ориентируем, если это необходимо, элемент касания порядка p так, чтобы семейство реперов порядка p было непрерывным.

Определим *главные компоненты порядка* p.

Определим, как формы, $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и главные компоненты порядка p зависят от вторичных параметров порядка p; отсюда мы выведем, *как коэффициенты порядка* p *зависят от вторичных параметров порядка* p.

Мы распорядимся этими вторичными параметрами порядка p так, чтобы *установить между коэффициентами порядка* p *возможно большее число соотношений наиболее простого вида.* Этим значениям вторичных параметров соответствуют частные реперы порядка p: это будут *реперы порядка* $p+1$; значения, принятые коэффициентами порядка p, которые не будут числовыми константами, образуют *инварианты порядка* $p+1$; формулы (2) дадут тогда *выражения главных компонент порядка* p *и выражения дифференциалов инвариантов порядка* p как функций от $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядка $p+1$.

Замечание. Число главных компонент порядка p есть разность $\nu_{p-1}-\nu_p$ чисел вторичных параметров порядков $p-1$ и p; это число соотношений, которые мы установили между коэффициентами порядка $p-1$, чтобы определить реперы порядка p.

---

* П. 172 (стр. 299) дает наилучший способ быстрого выполнения операций, из которых состоит этот механизм.

130. Важное замечание. В некоторых исключительных точках выбор вторичных параметров, при котором между коэффициентами порядка p устанавливаются указанные соотношения (п. **129**), может быть невозможен или, наоборот, возможен бесчисленным числом способов *. Эта трудность может равным образом представиться во всех точках некоторых категорий многообразий, когда главные компоненты могут тождественно обращаться в нуль ** или когда инвариант порядка p может быть постоянным на многообразии ***. Для каждой категории многообразий, которые могут таким образом появиться, надо метод подвижного репера прилагать специальным образом.

Если исходить из порядка $p+1$ двух многообразий, принадлежащих двум различным категориям, то невозможно осуществить между ними касание порядка выше p, за исключением, быть может, некоторых исключительных точек ****.

131. Реперы Френе; условие равенства. Пусть задано многообразие V_λ; будем последовательно определять реперы и инварианты элементов касания различных порядков. Окончательно мы найдем некоторый порядок Q, такой, что реперы порядка $Q+1$ будут совпадать с реперами порядка Q и инварианты порядка $Q+1$ будут функциями инвариантов порядков $\leqslant Q$: действительно, число вторичных параметров не может уменьшиться больше, чем ν_0 раз, и число инвариантов, которые не связаны никакими соотношениями на V_λ, не может превосходить числа измерений λ многообразия V_λ. Реперирование элементов касания, порядок которых выше $Q+1$, производится очень легко. Реперы, порядок которых выше Q, совпадают с реперами порядка Q; инварианты порядка $Q+2$, инварианты порядка $Q+3, \ldots$ будут частными производными порядков 1, 2, .., от инвариантов порядка $Q+1$, рассматриваемых как функции системы инвариантов порядков $\leqslant Q$, которые независимы на многообразии V_λ. Назовем реперы порядка Q *«реперами Френе»* по аналогии со случаем действительных кривых.

---

* *Пример.* В точке перегиба действительной кривой все триэдры первого порядка удовлетворяют условию $\omega_{13}=0$, которое, вообще говоря, выделяет триэдры второго порядка в семействе триэдров первого порядка (п. 18, стр. 102).

** *Пример.* При изучении действительных кривых встречается категория прямых, для которых форма ω_{13} тождественно равна нулю.

*** *Пример.* Линейчатые изотропные поверхности, на которых k постоянно (глава IV, раздел II, стр. 147—150).

**** Например, действительная кривая не может иметь с прямой касание выше первого порядка, за исключением своих точек перегиба.

Предположим, что фундаментальная группа G состоит из аналитических преобразований, и рассмотрим два аналитических многообразия. Совместить эти многообразия — значит осуществить в двух их точках касание, порядок которого больше любого целого числа p.

Следовательно, для того чтобы два многообразия были равны, необходимо и достаточно, чтобы они принадлежали одной категории (п. **130**) *и чтобы их инварианты порядков* $\leqslant Q+1$ *были связаны одинаковой системой соотношений.*

Тогда операциями группы G, которые их совмещают, будут преобразования, которые совмещают два из их реперов Френе, принадлежащих двум точкам, в которых инварианты порядка Q одни и те же.

Надлежащее использование основного условия равенства (п. **76**, стр. 177) позволит, впрочем, снова прийти к этому результату и освободиться от предположения, что преобразования группы и рассматриваемые многообразия — аналитические.

Приложение. Предположим, что реперы Френе многообразия V_λ еще зависят от вторичных параметров. Решение, которое мы только что дали проблеме равенства, показывает нам, что многообразие V_λ преобразуется само в себя непрерывной подгруппой группы G, которая преобразует друг в друга реперы Френе одной и той же точки многообразия V_λ.

132. Проблема. *При каком условии многообразие V_λ обладает следующим свойством*: для двух произвольно заданных точек многообразия V_λ всегда существует операция группы G, которая преобразует многообразие V_λ в себя и переводит одну из этих точек в другую?*

Мы докажем, что ответ на этот вопрос следующий: *для этого инварианты разных порядков на V_λ должны быть все постоянны.*

Очевидно, что условие необходимо; докажем, что оно достаточно. Если это условие выполняется, то реперы Френе будут первыми реперами, для которых соотношения, существующие между их главными компонентами, будут иметь постоянные коэффициенты. Число соотношений с постоянными коэффициентами будет равно $r-\nu_0-\lambda$. Реперы Френе многообразия V_λ, которые зависят от $\nu_0+\lambda$ параметров, образуют, следовательно, в силу теоремы п. **124** (стр. 240), реперы, присоединенные к объекту, который преобразует груп-

* Если G будет группой движений, то сфера обладает этим свойством.

па G. Подгруппа, которая переводит одни из этих реперов в другие, оставляет инвариантным семейство, которое они образуют, а следовательно, и многообразие V_λ. Наше предложение таким образом, установлено; сверх того, мы замечаем, что в качестве семейства реперов, присоединенных к объекту, который образует многообразие V_λ, можно выбрать семейство реперов Френе этого многообразия *.

II. АФФИННАЯ УНИМОДУЛЯРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КРИВЫХ

133. Введение. Поставим себе целью приложить метод подвижного репера к изучению плоских действительных кривых относительно групп G аффинных унимодулярных преобразований. Эта группа определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c', \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 1. \right\} \tag{1}$$

Она образована множеством аффинных преобразований (п. 65, стр. 161), которые сохраняют площади. Будем изображать, как в случае аффинной группы, *абсолютный репер* R_0 векторами $\mathbf{I}_1^0$ и $\mathbf{I}_2^0$, имеющими точку (0,0) своим началом, а точки (1,0) и (0,1) своими концами. *Репер* R будет образован двумя произвольными векторами $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, имеющими общее начало A и удовлетворяющими соотношению **

$$\mathbf{I}_1 \wedge \mathbf{I}_2 = 1^{***}. \tag{2}$$

Чтобы охарактеризовать положение репера R_{da}, бесконечно близкого к реперу R_0, достаточно задать координаты $\omega_1(0, da)$ и $\omega_2(0, da)$ точки A, компоненты $1 + \omega_{11}(0, da)$, $\omega_{12}(0, da)$ вектора $\mathbf{I}_1$ и компоненты $\omega_{21}(0, da)$, $1 + \omega_{22}(0, da)$ вектора $\mathbf{I}_2$; кроме того, в силу (2), имеем

$$\omega_{11}(0, da) + \omega_{22}(0, da) = 0.$$

Линейно независимые формы

$$\omega_1(0, da),\ \omega_2(0, da),\ \omega_{11}(0, da),\ \omega_{12}(0, da),\ \omega_{21}(0, da),$$

---

* Так в п. 44 (глава III, стр. 135) мы присоединяли к прямой триэдры, первый вектор которых расположен на этой прямой; эти триэдры будут триэдрами первого порядка кривой, которая образует эту прямую.

** Это соотношение показывает, что параллелограмм, двумя боковыми сторонами которого будут векторы $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, имеет площадь, равную $+1$.

*** Здесь и в дальнейшем $\wedge$ — знак внешнего произведения векторов.— *Прим. перев.*

число которых равно числу параметров аффинной унимодулярной группы, выберем в качестве компонент инфинитезимального смещения, которое переводит R_0 в R_{da}.

Теперь рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались в п. 72 (стр. 172) для случая аффинной группы, доказывается, что *относительными компонентами* репера $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ будут 5 форм ω, которые определяют формулы

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_1(a, da)\,\mathbf{I}_1 + \omega_2(a, da)\,\mathbf{I}_2, \\ d\mathbf{I}_1 &= \omega_{11}(a, da)\,\mathbf{I}_1 + \omega_{12}(a, da)\,\mathbf{I}_2, \\ d\mathbf{I}_2 &= \omega_{21}(a, da)\,\mathbf{I}_1 - \omega_{11}(a, da)\,\mathbf{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

134. Определение элементов нулевого и первого порядков. Элемент касания нулевого порядка образован точкой, элемент касания первого порядка — точкой и касательной. Следовательно, нет инвариантов нулевого и первого порядков. По определению, *реперами нулевого порядка в точке A* будут реперы $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ с вершиной в A, *реперами первого порядка* в точке A будут реперы $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$, первый вектор $\mathbf{I}_1$ которых касается кривой. Реперы нулевого порядка образуют непрерывное семейство. Реперы первого порядка образуют два непрерывных семейства; элемент касания первого порядка распадается, следовательно, на два ориентированных элемента касания.

Группа G зависит от $r = 5$ параметров; реперы нулевого и первого порядков зависят соответственно от $\nu_0 = 3$ и $\nu_1 = 2$ параметров; следовательно, число главных компонент нулевого порядка равно $r - \nu_0 = 2$, а число главных компонент первого порядка равно $\nu_0 - \nu_1 = 1$.

Когда репер нулевого порядка не меняется и его вершина остается неподвижной, $d\mathbf{A} = 0$; следовательно, $\omega_1 = \omega_2 = 0$; ω_1 и ω_2 будут главными компонентами нулевого порядка. Впрочем, когда репер меняется, оставаясь все время репером первого порядка, $d\mathbf{A}$ параллельно вектору $\mathbf{I}_1$, следовательно, $\omega_2 = 0$. Главными компонентами нулевого порядка реперов первого порядка будут, следовательно, формы

Порядок 0
ω_1, $\omega_2\,(=0)$

135. Определение элементов второго порядка. Рассмотрим два переменных репера первого порядка некоторой кривой: $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ и $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$; пусть ω и $\bar{\omega}$ — их относительные компоненты, а b и $\bar{b}$ — коэффициенты первого порядка. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \lambda \mathbf{J}_1, \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{1}{\lambda}(\mathbf{J}_2 + \mu \mathbf{J}_1). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В силу предыдущего пункта, существует единственная главная компонента первого порядка; в силу (4), когда точка A неподвижна, вектор $d\mathbf{I}_1$ параллелен вектору $\mathbf{I}_1$, следовательно, $\omega_{12}=0$, т. е. ω_{12} — главная компонента первого порядка; коэффициент b первого порядка мы определим с помощью соотношения $\omega_{12}=b\omega_1$.

Подсчитаем ω_1 и ω_{12} как функции от $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{12}$ и вторичных параметров λ и μ; получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= dA \wedge \mathbf{I}_2 = \frac{1}{\lambda}\, dA \wedge (\mathbf{J}_2 + \mu \mathbf{J}_1) = \frac{1}{\lambda}\,\bar{\omega}_1, \\ \omega_{12} &= \mathbf{I}_1 \wedge d\mathbf{I}_1 = \lambda^2 \mathbf{J}_1 \wedge d\mathbf{J}_1 = \lambda^2 \bar{\omega}_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

откуда

$$b = \lambda^3 \bar{b}. \tag{6}$$

По определению, реперами второго порядка будут такие реперы первого порядка, для которых $b=1$. Инвариантов второго порядка нет. Главными компонентами порядков $\leqslant 1$ реперов второго порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1
ω_1, $\omega_2\ (=0)$	$\omega_{12}\ (=\omega_1)$

Исключительную категорию кривых образуют кривые, для которых предыдущие определения не имеют смысла — кривые, вдоль которых главная компонента первого порядка ω_{12} постоянно равна нулю. Обстоятельства, которые мы изучали в п. **132** (стр. 247), теперь осуществлены: операции группы G, которые преобразуют одни реперы первого порядка в другие, образуют подгруппу, оставляющую эту кривую инвариантной. Впрочем, очевидно, что рассматриваемая категория кривых будет семейством прямых.

136. Определение элементов третьего порядка. Заменяя в равенстве (6) величины b и $\bar{b}$ на 1, мы получим $\lambda^3 = 1$, т. е. поскольку λ — действительное число, $\lambda = 1$. Формулы, которые позволяют сравнивать два репера второго порядка $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ и $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$, получаются, следовательно, если заменить в (4) λ на 1:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{J}_1, \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{J}_2 + \mu\mathbf{J}_1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти формулы (7) доказывают, что семейство реперов второго порядка непрерывно: элемент касания второго порядка обладает только одной ориентацией; он присваивает определенную ориентацию касательной к кривой.

Так как мы определили реперы второго порядка, наложив одно условие на коэффициенты первого порядка, существует только *одна* главная компонента второго порядка. Когда точка A остается неподвижной, то и вектор $\mathbf{J}_1$ остается неподвижным, следовательно, $\omega_{11} = 0$. Форма ω_{11} — главная компонента второго порядка; коэффициент b второго порядка определяется соотношением $\omega_{11} = b\omega_1$.

Подсчитаем ω_1 и ω_{11} как функции от $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_{11}$ и μ. Заменяя в (4) λ на единицу, мы получаем $\omega_1 = \bar{\omega}_1$. Форма ω_1, следовательно, не зависит от вторичного параметра второго порядка; мы будем ее обозначать $d\sigma$ и будем называть σ *аффинной дугой.*

Мы имеем далее:

$$\omega_{11} = d\mathbf{I}_1 \wedge \mathbf{I}_2 = d\mathbf{J}_1 \wedge (\mathbf{J}_2 + \mu\mathbf{J}_1) = \bar{\omega}_{11} - \mu\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{11} - \mu\omega_1,$$

откуда

$$b = \bar{b} - \mu.$$

По определению, реперами третьего порядка будут такие реперы второго порядка, для которых $b = 0$. Инвариантов третьего порядка нет.

Главными компонентами порядков $\leqslant 2$ реперов третьего порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2
ω_1, ω_2 $(= 0)$	ω_{12} $(= \omega_1)$	ω_{11} $(= 0)$

Репер третьего порядка не зависит ни от каких вторичных параметров; он образует *репер Френе.*

137. Определение элементов порядков > 3. Реперы порядков > 3 совпадают с реперами Френе. Существует один инвариант четвертого порядка $k = \frac{\omega_{21}}{d\sigma}$; мы будем называть его *аффинной кривизной.* Существует инвариант порядка $p > 4$, а именно $\frac{d^{p-4}k}{d\sigma^{p-4}}$. Относительными компонентами репера Френе будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3
$\omega_1,\ \omega_2\ (=0)$,	$\omega_{12}\ (=0)$	$\omega_{11}\ (=0)$	$\omega_{21} = k\,d\sigma$

Иначе говоря, мы имеем *формулы Френе:*

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\sigma\,\mathbf{I}_1,\\ d\mathbf{I}_1 &= d\sigma\,\mathbf{I}_2,\\ d\mathbf{I}_2 &= k\,d\sigma\,\mathbf{I}_1.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Порядок Q, определенный в п. **131** (стр. 246), равен 3, если k постоянно; в противном случае он равен 4.

Теорема структуры п. **77** (стр. 178), дает, что k—произвольная функция от σ.

Проблемы равенства. Основное условие равенства, высказанное в п. **76** (стр. 177), сводит отыскание всех аффинных унимодулярных преобразований, которые совмещают две кривые C и C^*, к отысканию всех взаимно однозначных соответствий между их точками, таких, что

$$k = k^*, \quad d\sigma = d\sigma^*.$$

138. Аналитическое определение репера Френе, кривизны и аффинной дуги. *Общие сведения.* Предположим, что в каждой точке кривой $[x,\ y\ (x)]$ определен некоторый репер первого порядка $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$. Пусть, например, для такого репера

$$\left.\begin{array}{ll} \text{координаты точки } \mathbf{A} \ \ldots\ldots & x,\ y;\\ \text{компоненты вектора } \mathbf{J}_1 \ \ldots\ldots & 1,\ y';\\ \text{компоненты вектора } \mathbf{J}_2 \ \ldots\ldots & 0,\ 1.\end{array}\right\} \tag{9}$$

Реперы $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ первого порядка вводятся по формулам (4); реперами второго порядка служат те из этих реперов первого порядка, для которых $\omega_{12} = \omega_1$; реперы Френе — это такие реперы, для которых $\omega_{12}=\omega_1$ и $\omega_{11}=0$. Подсчитаем компоненты ω бесконечно малого смещения репера $A\,\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ с помощью компонент $\bar{\omega}$, которые относятся к конкретному реперу $A\,\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$. Сначала, в силу (5), мы получим

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda}\bar{\omega}_1, \quad \omega_{12} = \lambda^2\bar{\omega}_{12}.$$

С другой стороны,

$$\omega_{11} = d\mathbf{I}_1 \wedge \mathbf{I}_2 = \frac{1}{\lambda}(d\lambda\mathbf{J}_1 + \lambda\, d\mathbf{J}_1) \wedge (\mathbf{J}_2 + \mu\mathbf{J}_1) = \bar{\omega}_{11} - \mu\bar{\omega}_{12} + \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$\omega_{21} = d\mathbf{I}_2 \wedge \mathbf{I}_2 = \frac{1}{\lambda^2}(d\mathbf{J}_2 + \mu\, d\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1\, d\mu) \wedge (\mathbf{J}_2 + \mu\mathbf{J}_1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(\bar{\omega}_{21} + 2\mu\bar{\omega}_{11} - \mu^2\bar{\omega}_{12} + d\mu).$$

Первый пример. Предположим, что роль $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$ играет репер (9). Тогда

$d\mathbf{A}$ имеет компонентами . . . . . $dx,\ y'\,dx$;

$d\mathbf{J}_1$ имеет компонентами . . . . . $0,\ y''\,dx$;

$d\mathbf{J}_2$ имеет компонентами . . . . . $0,\ 0$,

и, следовательно, получаем:

$$\bar{\omega}_1 = dx, \quad \bar{\omega}_{11} = 0, \quad \bar{\omega}_{12} = y''\,dx, \quad \bar{\omega}_{21} = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda}\,dx, \quad \omega_{12} = \lambda^2 y''\,dx,$$

$$\omega_{11} = -\mu y''\,dx + \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \omega_{21} = \frac{1}{\lambda^2}(-\mu^2 y''\,dx + d\mu).$$

Эти выражения компонент ω доказывают, что реперы второго порядка получаются, если принять в (4) $\lambda = (y'')^{-\frac{1}{3}}$ и оставить произвольным μ; репер Френе получится затем, если в (4) положить

$$\lambda = (y'')^{-\frac{1}{3}}, \quad \mu = \frac{1}{y''}\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{y'''}{(y'')^2}. \tag{10}$$

По определению $\omega_1 = d\sigma$; отсюда

$$d\sigma = (y'')^{\frac{1}{3}}\, dx; \tag{11}$$

кривизна k получится, если заменить λ и μ их значениями (10) в формуле

$$k = \frac{\omega_{21}}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\left(-\mu^2 y''\, dx + \frac{d\mu}{dx}\right).$$

Отсюда следует

$$k = -\frac{\mu}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d\lambda}{dx}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2(\lambda^2)}{dx^2},$$

и окончательно

$$k = \frac{1}{2}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]''. \tag{12}$$

Второй пример. Предположим, теперь, что абсолютный репер R_0 будет прямоугольным и что мы принимаем за репер $A\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$ евклидов репер первого порядка, который присоединен к каждой кривой: $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ имеют единичную длину, вектор $\mathbf{J}_2$ образует с вектором $\mathbf{J}_1$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$; обозначим через s криволинейную евклидову абсциссу и через R радиус евклидовой кривизны кривой; имеем:

$$\overline{\omega}_1 = ds,\quad \overline{\omega}_{11} = 0,\quad \overline{\omega}_{12} = \frac{ds}{R},\quad \overline{\omega}_{21} = -\frac{ds}{R},$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda}\, ds,\quad \omega_{12} = \frac{\lambda^2}{R}\, ds,$$

$$\omega_{11} = -\frac{\mu}{R}\, ds + \frac{d\lambda}{\lambda},\quad \omega_{21} = \frac{1}{\lambda^2}\left[-(1+\mu^2)\frac{ds}{R} + d\mu\right].$$

Эти выражения компонент доказывают, что реперы второго порядка получатся, если в уравнениях (4) положить

$$\lambda = R^{\frac{1}{3}},\quad \mu = \frac{R}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{3}\frac{dR}{ds}. \tag{13}$$

По определению, $\omega_1 = d\sigma$; отсюда

$$d\sigma = R^{-\frac{1}{3}}\, ds; \tag{14}$$

кривизна k получится, если заменить λ и μ их значениями (13) в формуле

$$k = \frac{\omega_{21}}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\left[-(1+\mu^2)\frac{1}{R} + \frac{d\mu}{ds}\right].$$

Тогда получим:

$$k = -\frac{1}{\lambda R} - \frac{\mu}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\mu}{ds} = -\frac{1}{\lambda R} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) =$$

$$= R^{-\frac{4}{3}} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}R^{-\frac{1}{3}}\frac{dR}{ds}\right)$$

и окончательно

$$k = -R^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(R^{\frac{2}{3}}\right). \tag{15}$$

Замечание относительно аффинной дуги. В силу формул Френе (8), какими бы мы параметрами не пользовались для реперирования точки кривой, имеем:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{I}_1\, d\sigma \quad \text{и} \quad d^2\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 d\sigma^2 + \mathbf{I}_1 d^2\sigma.$$

Но

$$\mathbf{I}_1 \wedge \mathbf{I}_2 = 1,$$

откуда

$$d\sigma = (d\mathbf{A} \wedge d^2\mathbf{A})^{\frac{1}{3}}. \tag{16}$$

Эта формула, очевидно, как частные случаи содержит формулы (11) и (14).

139. Приведенное уравнение. Мы можем восстановить формулы Френе, непосредственно отыскивая приведенное уравнение кривой в окрестности одной из ее точек A. Выбирая декартов репер с началом в точке A и первым вектором $\mathbf{I}_1$, расположенным на касательной, мы получим уравнение кривой в виде

$$y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{6}\beta x^3 + \dots .$$

Допустимыми заменами координат будут замены

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = \nu y \quad \text{с} \quad \lambda\nu = 1;$$

можно привести коэффициент α к единице, полагая $\lambda^3 = \alpha$, затем коэффициент β к нулю, полагая $\mu = \frac{\beta\lambda}{3\alpha^2}$. Таким образом, приведенное уравнение будет иметь вид

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}hx^4 + \frac{1}{5}lx^5 + \dots .$$

Абсцисса x точки A', бесконечно близкой к точке A, может рассматриваться как главная часть *элемента аффинной дуги* AA'.

Подсчитывая относительные компоненты инфинитезимальных смещений, проверим, что введенный таким образом в каждой точке репер действительно является репером Френе. Пусть

$$d\mathbf{A} = \omega_1\mathbf{I}_1 + \omega_2\mathbf{I}_2,$$
$$d\mathbf{I}_1 = \omega_{11}\mathbf{I}_1 + \omega_{12}\mathbf{I}_2,$$
$$d\mathbf{I}_2 = \omega_{21}\mathbf{I}_1 - \omega_{11}\mathbf{I}_2.$$

Относительные координаты x, y фиксированной точки B кривой относительно репера с началом A меняются вместе с этим репером по формулам

$$dx + \omega_1 + x\omega_{11} + y\omega_{21} = 0,$$
$$dy + \omega_2 + x\omega_{12} - y\omega_{11} = 0,$$

но имеется соотношение

$$dy = (x + hx^3 + lx^4 + \dots)\, dx + \frac{1}{4}\, dh\, x^4 + \dots,$$

откуда

$$\omega_2 + x\omega_{12} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}hx^4 + \dots\right)\omega_{11} + \frac{1}{4}\, dh\, x^4 + \dots =$$

$$= (x + hx^3 + lx^4 + \dots)\left[\omega_1 + x\omega_{11} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}hx^4 + \dots\right)\omega_{21}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого соотношения, получим:

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_{12} = \omega_1, \quad -\frac{1}{2}\omega_{11} = \omega_{11}.$$

Эти уравнения показывают тождественность рассматриваемого репера с репером Френе. Имеем далее:

$$\frac{1}{2}\,\omega_{21}+h\omega_1=0, \quad -\frac{1}{4}\,h\omega_{11}=h\omega_{11}+l\omega_1-\frac{1}{4}\,dh, \dots .$$

Отсюда следует

$$h=-\frac{1}{2}\,k, \quad l=-\frac{1}{8}\,\frac{dk}{d\sigma}, \dots,$$

откуда получаем приведенное уравнение

$$y=\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{8}\,kx^4-\frac{1}{40}\,\frac{dk}{d\sigma}\,x^5+\dots . \tag{17}$$

Равным образом можно было бы вывести формулы Френе (8), дифференцируя по переменному σ уравнение

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\sigma\mathbf{I}_1+\frac{1}{2}\,\sigma^2\mathbf{I}_2+\frac{1}{6}\,k\sigma^3\mathbf{I}_1+\frac{1}{24}\,\frac{dk}{d\sigma}\,\sigma^4\mathbf{I}_1+\frac{1}{24}\,k\sigma^4\mathbf{I}_2+\dots,$$

из которого следуют разложения

$$\left.\begin{aligned} x&=\sigma+\frac{1}{6}\,k\sigma^3+\frac{1}{24}\,\frac{dk}{d\sigma}\,\sigma^4+\dots,\\ y&=\frac{1}{2}\,\sigma^2+\frac{1}{24}\,k\sigma^4+\dots . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

140. Геометрическое определение аффинной дуги, репера Френе и аффинной кривизны. Пусть Δ — направление прямой, параллельной касательной в точке A; пусть $AC'A'$ — треугольник, сторона AC' которого касается кривой в точке A, а сторона $C'A'$ параллельна направлению Δ (фиг. 5); площадь этого треугольника, который в своей главной части не зависит от Δ, в силу (17), будет равна $\frac{1}{4}\,x^3\sim\frac{1}{4}\,\sigma^3$, откуда

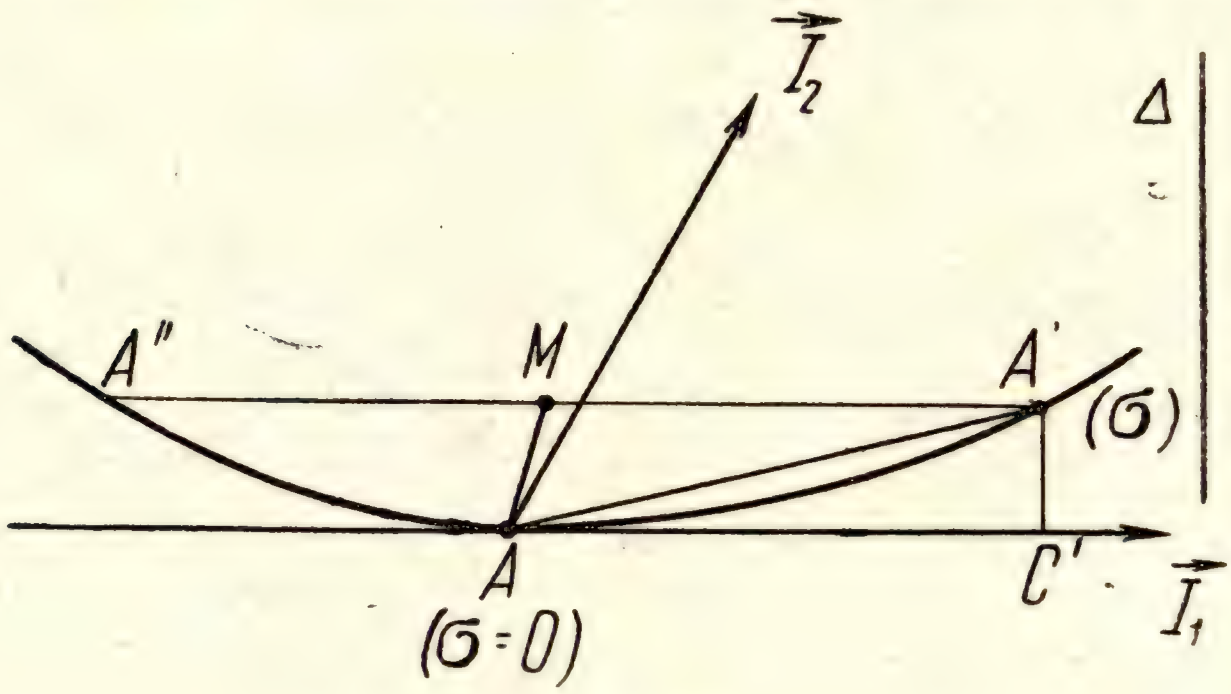
$$d\sigma\sim\sqrt[3]{4S_{AC'A'}} \text{ и } \mathbf{I}_1=\lim\frac{\overrightarrow{AA'}}{\sigma}.$$

Проведем теперь прямую, параллельную касательной в точке A, бесконечно близкую к точке A и проходящую с той стороны, где находится кривая. Она пересечет кривую в двух бесконечно близких к A точках A' и A'', пусть M — середина $A'A''$ (фиг. 5). В силу (17), точка M имеет абсциссу, равную нулю; следовательно, вектор $\mathbf{I}_2$ расположен на предельном

положении прямой AM, которое называется *аффинной нормалью.*

Можно еще сказать, что аффинная нормаль есть проходящий через точку A диаметр *соприкасающейся параболы* к кривой в точке A, параболы, которая, в силу (17), имеет уравнение $y = \frac{1}{2} x^2$.

Геометрическая характеристика аффинной кривизны вытекает из теории *линий постоянной аффинной кривизны.* Эти



Фиг. 5

линии вместе с прямыми — единственные линии, которые являются своими собственными преобразованиями при бесконечном множестве аффинных унимодулярных преобразований (ср. п. **132**, стр. 247). Существует одна и только одна такая линия, имеющая данную кривизну k и допускающая в качестве репера Френе заданный репер $O'\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$; эта линия получается в результате интегрирования системы

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} = \mathbf{I}_1, \quad \frac{d\mathbf{I}_1}{d\sigma} = \mathbf{I}_2, \quad \frac{d\mathbf{I}_2}{d\sigma} = k\mathbf{I}_1.$$

Выберем точку O за начало криволинейных абсцисс и начнем с частного случая, когда $k = 0$. В этом случае

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{K}_2, \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{K}_1 + \sigma\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{A} = \mathbf{O} + \sigma\mathbf{K}_1 + \frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{K}_2;$$

кривая будет *параболой,* ось которой параллельна вектору $\mathbf{K}_2$. Предположим теперь, что $k < 0$; мы имеем

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{K}_1 \cos(\sqrt{-k}\sigma) + \frac{\mathbf{K}_2}{\sqrt{-k}} \sin(\sqrt{-k}\sigma),$$

$$\mathbf{I}_2 = -\sqrt{-k}\mathbf{K}_1 \sin(\sqrt{-k}\sigma) + \mathbf{K}_2 \cos(\sqrt{-k}\sigma),$$

откуда

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{O} - \frac{\mathbf{K}_2}{k}\right) + \frac{\mathbf{K}_1}{\sqrt{-k}} \sin(\sqrt{-k}\sigma) + \frac{\mathbf{K}_2}{k} \cos(\sqrt{-k}\sigma).$$

Следовательно, линия будет *эллипсом;* его центром будет точка $\mathbf{O} - \frac{\mathbf{K}_2}{k}$; сопряженными полудиаметрами его служат два вектора, эквиполлентных векторам $\frac{\mathbf{K}_1}{\sqrt{-k}}$ и $\frac{\mathbf{K}_2}{k}$; его площадь, следовательно, будет равна $\pi(-k)^{-\frac{3}{2}}$; этот последний факт и дает геометрическую интерпретацию аффинной кривизны k.

Так же линия будет *гиперболой,* если $k < 0$; сопряженными диаметрами ее служат два вектора, эквиполлентные векторам $\frac{\mathbf{K}_1}{\sqrt{k}}$ и $\frac{\mathbf{K}_2}{k}$; площадь параллелограмма, стороны которого параллельны асимптотам и для которого OA будет диагональю, равна $\frac{1}{2} k^{-\frac{3}{2}}$.

Все изложенное позволяет утверждать, что для произвольно заданной кривой в каждой из ее точек существует единственная кривая второго порядка, имеющая в этой точке с этой кривой касание, порядок которого $\geqslant 4$: постоянная кривизна этой кривой второго порядка будет кривизной кривой в рассматриваемой точке.

III. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КРИВЫХ*

141. Введение. Мы хотим приложить метод подвижного репера к изучению действительных плоских кривых относи-

---

* Вопросы, затронутые в этом разделе, можно найти в книге: E. Cartan. *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* [20], гл. II, раздел V, стр. 84—111.

тельно группы G проективных преобразований. Эта группа определяется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= a'x + b'y + c'z, \\ z' &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0, \right\} \tag{1}$$

где x, y, z — три однородных координаты точки на плоскости. Мы будем пользоваться построенными в п. **67** (стр. 163) реперами; они состоят из трех аналитических точек $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$, таких, что

$$[\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_2] = 1. \tag{2}$$

Относительными компонентами инфинитезимальных перемещений этих реперов* будут 8 величин ω_{00}, ω_{01}, ω_{02}, ω_{10}, ω_{11}, ω_{12}, ω_{20}, ω_{21}, которые определяют соотношения:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_{00}\mathbf{A} + \omega_{01}\mathbf{A}_1 + \omega_{02}\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_1 &= \omega_{10}\mathbf{A} + \omega_{11}\mathbf{A}_1 + \omega_{12}\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_2 &= \omega_{20}\mathbf{A} + \omega_{21}\mathbf{A}_1 + \omega_{22}\mathbf{A}_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0. \tag{3'}$$

142. Определение элементов нулевого и первого порядков. Не существует инвариантов нулевого и первого порядков. Реперами нулевого порядка в точке кривой будут реперы, первая вершина которых совпадает с рассматриваемой точкой. Реперами первого порядка будут те реперы нулевого порядка, вторая вершина которых лежит на касательной в рассматриваемой точке.

Группа G зависит от $r = 8$ параметров; реперы первого и второго порядков зависят соответственно от $\nu_0 = 6$ и $\nu_1 = 5$ параметров; следовательно, число главных компонент нулевого порядка равно $r - \nu_0 = 2$, а число главных компонент первого порядка равно $\nu_0 - \nu_1 = 1$.

Когда репер нулевого порядка изменяется, а его вершина остается неподвижной, дифференциал $d\mathbf{A}$ будет пропорционален точке $\mathbf{A}$, следовательно, $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$. Поэтому ω_{01} и ω_{02} будут главными компонентами нулевого порядка. Впрочем, когда репер изменяется, неизменно оставаясь репером первого порядка, $d\mathbf{A}$ будет линейной комбинацией точек $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_1$,

---

* См. п. 73, стр. 173.

следовательно, $\omega_{02}=0$. Главными компонентами нулевого порядка реперов первого порядка будут, следовательно, формы

Порядок 0
$\omega_{01}, \quad \omega_{02}\,(=0)$

143. Определение элементов второго порядка. Рассмотрим два репера первого порядка одной и той же переменной точки $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$; мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}, \\ &\mathbf{A}_1 = \lambda_1\mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}, \quad \text{где} \quad \lambda\lambda_1\lambda_2 = 1, \\ &\mathbf{A}_2 = \lambda_2\mathbf{B}_2 + \rho\mathbf{B}_1 + \sigma\mathbf{B}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно, реперы первого порядка образуют четыре непрерывных семейства, характеризуемых четырьмя системами знаков, которые могут быть присвоены двум параметрам λ и λ_1: элемент касания первого порядка распадается, следовательно, на четыре ориентированных элемента касания.

В силу предыдущего пункта существует единственная главная компонента первого порядка. В силу (4), когда репер $\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ остается неподвижным, а λ, λ_1, λ_2, μ, ρ, σ изменяются, $d\mathbf{A}_1$ будет линейной комбинацией точек $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_1$; следовательно, $\omega_{12}=0$, и потому ω_{12} есть главная компонента первого порядка; коэффициент первого порядка b мы определим соотношением $\omega_{12}=b\omega_{01}$.

Вычислим* ω_{01} и ω_{12} как функции $\overline{\omega}_{01}$, $\overline{\omega}_{12}$, λ, λ_1, λ_2, μ, ρ, σ. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{01} &= [\mathbf{A},\, d\mathbf{A},\, \mathbf{A}_2] = [\lambda\mathbf{B},\, \mathbf{B}d\lambda + \lambda(\overline{\omega}_{00}\mathbf{B} + \overline{\omega}_{01}\mathbf{B}_1), \\ &\qquad \lambda_2\mathbf{B}_2 + \rho\mathbf{B}_1 + \sigma\mathbf{B}] = \lambda^2\lambda_2\overline{\omega}_{01}, \\ \omega_{12} &= [\mathbf{A},\, \mathbf{A}_1,\, d\mathbf{A}_1] = [\lambda\mathbf{B},\, \lambda_1\mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B},\, \mathbf{B}_1\cdot d\lambda_1 + \\ &\qquad + \mathbf{B}d\mu + \lambda_1 d\mathbf{B}_1 + \mu d\mathbf{B}] = \lambda\lambda_1^2\overline{\omega}_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда

$$b = \lambda_1^3\overline{b}. \tag{6}$$

---

* Здесь формы ω — компоненты репера $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, а в формы $\overline{\omega}$ — компоненты репера $\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$.

По определению, реперами второго порядка будут такие реперы первого порядка, для которых $b=1$. Не существует инвариантов второго порядка. Главными компонентами порядков $\leqslant 1$ реперов второго порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1
ω_{01}, ω_{02} $(=0)$	ω_{12} $(=\omega_{01})$

Исключительную категорию кривых представляют кривые, для которых предыдущее рассуждение не имеет смысла: это кривые, вдоль которых перемещения реперов первого порядка удовлетворяют соотношению $\omega_{12}=0$. Тогда осуществляются изученные в п. 132 обстоятельства. Впрочем, очевидно, что эту категорию кривых образуют прямые.

144. Определение элементов третьего порядка. Заменяя в уравнении (6) b и $\bar{b}$ на 1, мы получим $\lambda_1^3=1$, т. е. $\lambda_1=1$. Формулы, позволяющие сравнивать два репера второго порядка $\mathbf{AA}_1\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{BB}_1\mathbf{B}_2$ одной и той же точки, получатся, следовательно, если заменить в (4) λ_1 на 1; тогда получается

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}_2 + \rho\mathbf{B}_1 + \sigma\mathbf{B}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Значит, реперы второго порядка образуют два непрерывных семейства, характеризующиеся знаком λ: элемент касания второго порядка разлагается на два ориентированных элемента касания.

Существует *одна* главная компонента второго порядка, потому что мы определили реперы второго порядка, налагая *одно* соотношение на коэффициент первого порядка. В силу (7), когда репер $\mathbf{BB}_1\mathbf{B}_2$ остается неподвижным, а величины λ, μ, ρ, σ меняются, дифференциал $d\mathbf{A}_1$ пропорционален точке $\mathbf{A}$; следовательно, $\omega_{11}=0$, и потому ω_{11} — главная компонента первого порядка. Коэффициент b второго порядка мы определим соотношением $\omega_{11}=b\omega_{01}$.

Подсчитаем ω_{01} и ω_{11} как функции $\bar{\omega}_{01}$, $\bar{\omega}_{11}$, λ, μ, ρ, σ. В силу (5) внося туда $\lambda_1=1$, т. е. $\lambda\lambda_2=1$, имеем

$$\omega_{01} = \lambda\bar{\omega}_{01}. \tag{8}$$

Далее получим

$$\omega_{11}' = [\mathbf{A}, d\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] =$$

$$= [\lambda\mathbf{B}, d\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}d\mu + \mu d\mathbf{B}, \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}_2 + \rho\mathbf{B}_1 + \sigma\mathbf{B}] =$$

$$= \overline{\omega}_{11} + (\mu - \lambda\rho)\,\overline{\omega}_{01},$$

откуда

$$b = \frac{1}{\lambda}\,\overline{b} + \left(\frac{\mu}{\lambda} - \rho\right). \tag{9}$$

По определению, реперами третьего порядка будут такие реперы второго порядка, для которых $b = 0$. Не существует инвариантов третьего порядка. Главными компонентами порядков $\leqslant 2$ реперов третьего порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2
ω_{01}, $\omega_{02}\,(=0)$	$\omega_{12}\,(=\omega_{01})$	$\omega_{11}\,(=0)$

145. Определение элементов четвертого порядка. Заменяя в (9) b и $\overline{b}$ на 0, получим $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$. Формулы, позволяющие сравнивать два репера третьего порядка одной и той же точки, следовательно, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{\lambda}(\mathbf{B}_2 + \mu\mathbf{B}_1 + \nu\mathbf{B}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Значит, элемент касания третьего порядка распадается на два ориентированных элемента касания.

Существует одна главная компонента третьего порядка. Предположим, что в формулах (10) величины $\lambda - 1$, μ, ν будут бесконечно малыми; преобразование, переводящее репер $\mathbf{BB}_1\mathbf{B}_2$ в репер $\mathbf{AA}_1\mathbf{A}_2$, имеет следующие относительные компоненты:

$$\begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ \nu & \mu & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

следовательно, $\omega_{10}-\omega_{21}=0$; поэтому форма $\omega_{10}-\omega_{21}$ является главной компонентой третьего порядка. Мы будем полагать $\omega_{10}-\omega_{21}=b\omega_{01}$.

Имеем*:

$$\omega_{10}=[d\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]=$$

$$=\left[d\mathbf{B}_1+\mu d\mathbf{B}+\mathbf{B}d\mu, \mathbf{B}_1+\mu\mathbf{B}, \frac{1}{\lambda}(\mathbf{B}_2+\mu\mathbf{B}_1+\nu\mathbf{B})\right]=$$

$$=\frac{1}{\lambda}(d\mu+\mu\overline{\omega}_{00}+\overline{\omega}_{10}-\nu\overline{\omega}_{01}),$$

$$\omega_{21}=[\mathbf{A}, d\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2]=\frac{1}{\lambda}[d\mu+\mu\overline{\omega}_{00}+\overline{\omega}_{21}+(\nu-\mu^2)\overline{\omega}_{01}],$$

$$\omega_{10}-\omega_{21}=\frac{1}{\lambda}(\overline{\omega}_{10}-\overline{\omega}_{21})+\frac{\mu^2-2\nu}{\lambda}\overline{\omega}_{01}.$$

Отсюда, принимая во внимание (8), получим:

$$b=\frac{1}{\lambda^2}\overline{b}+\frac{\mu^2-2\nu}{\lambda^2}. \tag{11}$$

По определению, реперами четвертого порядка будут такие реперы третьего порядка, для которых $b=0$. Инвариантов четвертого порядка нет. Главными компонентами порядков $\leqslant 3$ реперов четвертого порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3
ω_{01}, $\omega_{02}\,(=0)$	$\omega_{12}\,(=\omega_{01})$	$\omega_{11}\,(=0)$	$\omega_{10}-\omega_{21}\,(=0)$

146. Определение элементов пятого порядка. Заменяя в (11) b и $\overline{b}$ нулем, получаем $\nu=\frac{\mu^2}{2}$. Формулы, позволяющие сравнивать реперы четвертого порядка одной и той же точки, следовательно, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}&=\lambda\mathbf{B},\\ \mathbf{A}_1&=\mathbf{B}_1+\mu\mathbf{B},\\ \mathbf{A}_2&=\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{B}_2+\mu\mathbf{B}_1+\frac{\mu^2}{2}\mathbf{B}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

---

* Можно упростить подсчет, заменив $d\mu$ нулем, так как значение $\omega_{10}-\omega_{21}$ не зависит от значения $d\mu$.

Следовательно, элемент касания четвертого порядка обладает двумя ориентациями.

Главные компоненты четвертого порядка существуют. Предположим, что в формулах (11) $\lambda-1$ и μ будут бесконечно малыми; преобразование, которое переводит репер $\mathbf{BB_1B_2}$ в репер $\mathbf{AA_1A_2}$, имеет следующие относительные компоненты:

$$\begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Форма ω_{20} будет, следовательно, главной компонентой четвертого порядка. Мы положим $\omega_{20}=b\omega_{01}$.

Довольно длинный подсчет позволяет вывести из (12), что

$$\omega_{20} = [d\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \frac{\overline{\omega}_{20}}{\lambda^2},$$

откуда, принимая во внимание уравнение (8), получим

$$b = \frac{\overline{b}}{\lambda^3}. \tag{13}$$

По определению, реперами пятого порядка будут такие реперы четвертого порядка, для которых $b=-1$. Инвариантов пятого порядка нет. Главными компонентами порядков $\leqslant 4$ реперов пятого порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3	Порядок 4
ω_{01}, $\omega_{02}\,(=0)$	$\omega_{12}\,(=\omega_{01})$	$\omega_{11}\,(=0)$	$\omega_{10}-\omega_{21}\,(=0)$	$\omega_{20}\,(=\omega_{01})$

147. Одна категория исключительных кривых. Предыдущее определение реперов пятого порядка не имеет смысла, когда смещения реперов четвертого порядка обращает в нуль форму ω_{20}. Кривые этой категории представляют ту особенность, которую мы изучали в п. **132** (стр. 247): каждая из них остается инвариантной под действием проективного преобразования, которое переводит один из ее реперов четвертого порядка в другой.

Определим, каковы будут эти кривые. Мы можем найти семейство реперов четвертого порядка, которые зависят только от главного параметра и для которых

$$\omega_{00} = 0, \qquad \omega_{10} = 0. \tag{14}$$

В действительности речь идет об определении вторичных параметров v_1 и v_2 как функций главного параметра u таким образом, чтобы удовлетворить двум дифференциальным уравнениям (14); но никакая комбинация форм ω_{00}, ω_{10} не будет комбинацией главных компонент; система (14) может быть записана в виде

$$dv_1 = f_1(u, v_1, v_2)\,du, \quad dv_2 = f_2(u, v_1, v_2)\,du.$$

При этих условиях мы имеем:

$$d\mathbf{A} = \omega_{01}\mathbf{A}_1, \quad d\mathbf{A}_1 = \omega_{01}\mathbf{A}_2, \quad d\mathbf{A}_2 = 0.$$

Выберем новый главный параметр t, определяемый уравнением $dt = \omega_{01}$; пусть $\mathbf{A}^0\mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^0$ — положение репера $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ для $t = 0$ тогда

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^0,\ \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2^0 + t\mathbf{A}_1^0,\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + t\mathbf{A}_1^0 + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}_2^0.$$

Следовательно, точка $\mathbf{A}$ относительно репера $\mathbf{A}^0\mathbf{A}_1^0$, $\mathbf{A}_2^0$ имеет следующие однородные координаты:

$$z = 1,\ x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2.$$

Значит, линиями рассматриваемой категории будут кривые второго порядка.

Если в некоторой точке некоторой линии, которая не является кривой второго порядка, компонента ω_{20} будет равна нулю, то точка будет *секстактической:* это означает, что соприкасающаяся в этой точке с кривой линия второго порядка имеет касание пятого порядка.

148. Определение элементов касания шестого порядка. Заменяя в уравнении (13) b и $\bar{b}$ на -1, мы получаем $\lambda = 1$. Следовательно, формулы, позволяющие сравнить реперы пятого порядка одной и той же точки, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{B}_2 + \mu\mathbf{B}_1 + \frac{\mu^2}{2}\mathbf{B}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Элемент касания пятого порядка обладает, следовательно, только одной ориентацией. В силу (8), полагая $\lambda=1$, получим

$$\omega_{01} = \overline{\omega}_{01}.$$

Таким образом, форма ω_{01} будет инвариантной формой пятого порядка: обозначим ее через $d\sigma$ и будем называть σ *проективной дугой.*

Главной компонентой пятого порядка будет, очевидно, форма ω_{00}; мы имеем:

$$\omega_{00} = [d\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] =$$

$$= \left[d\mathbf{B}, \mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}, \mathbf{B}_2 + \mu\mathbf{B}_1 + \frac{1}{2}\mu^2\mathbf{B}\right] = \overline{\omega}_{00} - \mu\omega_{01}.$$

Отсюда, полагая $\omega_{00} = b\omega_{01}$, получим

$$b = \overline{b} - \mu.$$

По определению, реперами шестого порядка будут такие реперы пятого порядка, для которых $b=0$. Инвариантов шестого порядка нет. Главными компонентами порядков $\leqslant 5$ реперов шестого порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3	Порядок 4	Порядок 5
ω_{01}, ω_{02} $(=0)$	$\omega_{12} (=\omega_{01})$	ω_{11} $(=0)$	$\omega_{10}-\omega_{21} (=0)$	$\omega_{20} = (-\omega_{01})$	ω_{00} $(=0)$

Репер шестого порядка не зависит ни от каких вторичных параметров; он образует *репер Френе.*

149. Определение элементов порядка >6. Существует инвариант порядка 7: $k=-\dfrac{\omega_{10}}{d\sigma}$; будем называть его *проективной кривизной.*

Существует инвариант порядка $p>7$: $\dfrac{d^{p-7}k}{d\sigma^{p-7}}$.

Мгновенное смещение репера Френе характеризуется *формулами Френе:*

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\sigma\,\mathbf{A}_1, \\ d\mathbf{A}_1 &= -k d\sigma\,\mathbf{A} + d\sigma\,\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_2 &= -d\sigma\,\mathbf{A} - k d\sigma\,\mathbf{A}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Теорема структуры. Из результатов п. **77** (стр. 178) следует, что k — произвольная функция переменной σ.

Основное условие равенства, сформулированное в п. **76** (стр. 177), сводит отыскание всех проективных преобразований, которые налагают две кривые C и C^*, к отысканию всех таких взаимно однозначных соответствий между их точками, при которых

$$k = k^*, \qquad d\sigma = d\sigma^*.$$

З а м е ч а н и е. Репер Френе определяется в точке линии только в том случае, если эта точка не будет ни точкой перегиба, ни секстактической; но следует заметить, что неявно предполагается также, что точка не будет точкой возврата.

150. Линии, рассматриваемые как огибающие прямых. Кривую можно рассматривать как огибающую ее касательных. С этой точки зрения следует ввести реперы, образованные тремя *аналитическими прямыми,* каждая из которых относительно некоторой неподвижной системы отнесения будет определяться тремя тангенциальными координатами u_1, u_2, u_3. Произведение аналитической прямой $(\mathbf{u})$ и аналитической точки $(\mathbf{x})$ равно величине $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3$. Репер $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, использовавшийся до сих пор, можно рассматривать как репер, образованный тремя аналитическими прямыми $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, совпадающими геометрически с прямыми $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$; его определение заканчивается наложением условия, чтобы произведения $\mathbf{a}\mathbf{A}_2$, $\mathbf{a}_1\mathbf{A}_1$, $\mathbf{a}_2\mathbf{A}_0$ были равны единице. Простой подсчет дает тогда следующие формулы:

$$d\mathbf{a} = -\omega_{22}\mathbf{a} - \omega_{12}\mathbf{a}_1 - \omega_{02}\mathbf{a}_2,$$

$$d\mathbf{a}_1 = -\omega_{21}\mathbf{a} - \omega_{11}\mathbf{a}_1 - \omega_{01}\mathbf{a}_2,$$

$$d\mathbf{a}_2 = -\omega_{20}\mathbf{a} - \omega_{10}\mathbf{a}_1 - \omega_{00}\mathbf{a}_2.$$

Заметим, что, если исходить из триэдра Френе, рассматриваемого с точечной точки зрения, находится матрица его относительных компонент; когда же триэдр Френе рассматривают с тангенциальной точки зрения, получается матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -d\sigma & 0 \\ kd\sigma & 0 & -d\sigma \\ d\sigma & kd\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Она отличается от предыдущей матрицы просто тем, что $d\sigma$ меняется на $-d\sigma$, кривизна k не меняется. *Следовательно, элемент проективной дуги кривой воспроизводится только с изменением знака, в то время как проективная кривизна не меняется.*

151. Приведенное уравнение. Можно быстро прийти к приведенному уравнению кривой в окрестности обыкновенной точки, исходя из соприкасающегося конического сечения, уравнение которого всегда можно привести к виду $y=\frac{1}{2}x^2$. Следовательно, искомое приведенное уравнение будет иметь вид

$$y=\frac{1}{2}x^2+\alpha x^5+\beta x^6+\gamma x^7+\ldots .$$

Допустимыми заменами координат служат такие замены, которые не меняют уравнения соприкасающегося конического сечения, а именно

$$x'=\frac{\lambda(x+\mu y)}{1+\mu x+\frac{1}{2}\mu^2 y}, \quad y'=\frac{\lambda^2 y}{1+\mu x+\frac{1}{2}\mu^2 y}.$$

Тогда находим

$$y'-\frac{1}{2}x'^2=\frac{\alpha\lambda^2x^5+\beta\lambda^2x^6+\ldots}{\left(1+\mu x+\frac{1}{2}\mu^2 y\right)^2},$$

откуда, обозначая через α' и β' новые коэффициенты уравнения, получаем

$$\lambda^2(\alpha x^5+\beta x^6)=\frac{\lambda^5\alpha'(x+\mu y)^5}{\left(1+\mu x+\frac{1}{2}\mu^2 y\right)^3}+\frac{\lambda^6\beta'(x+\mu y)^6}{\left(1+\mu x+\frac{1}{2}\mu^2 y\right)^4}+\ldots,$$

$$\alpha'=\frac{\alpha}{\lambda^3}, \quad \beta'=\frac{\beta+\frac{1}{2}\alpha\mu}{\lambda^4}.$$

Следовательно, можно достичь одним и только одним способом того, чтобы α было данной числовой константой m, а β — нулем. Таким образом получается приведенное уравнение

$$y=\frac{1}{2}x^2+mx^5+hx^7+\ldots .$$

Абсцисса x точки $\mathbf{A}'$, бесконечно близкой к точке $\mathbf{A}$, будет давать дифференциальный инвариант, который будет, с точностью до постоянного множителя, элементом проективной дуги.

Чтобы прийти к формулам Френе, будем исходить из формул:

$$d\mathbf{A} = \omega_{00}\mathbf{A} + \omega_{01}\mathbf{A}_1 + \omega_{02}\mathbf{A}_2,$$
$$d\mathbf{A}_1 = \omega_{10}\mathbf{A} + \omega_{11}\mathbf{A}_1 + \omega_{12}\mathbf{A}_2,$$
$$d\mathbf{A}_2 = \omega_{20}\mathbf{A} + \omega_{21}\mathbf{A}_1 + \omega_{22}\mathbf{A}_2,$$

дающих инфинитезимальное смещение репера, который присоединен к точке $\mathbf{A}$ кривой и для которого уравнение приведено к указанной форме. Неподвижная точка $\mathbf{B}$ с неоднородными координатами x, y соответствует аналитической точке $\mathbf{A}+x\mathbf{A}_1+y\mathbf{A}_2$. Выразим, что эта точка неподвижна, записывая, что ее дифференциал будет кратным самой точки. Это дает соотношения:

$$dx + \omega_{01} + x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21} - x(x\omega_{10} + y\omega_{20}) = 0,$$
$$dy + \omega_{02} + x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00}) - y(x\omega_{10} + y\omega_{20}) = 0.$$

Применяя употреблявшийся ранее метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x к соотношению

$$\omega_{02} + x\omega_{12} + \left(\frac{1}{2}x^2 + mx^5 + hx^7 + \dots\right)(\omega_{22} - \omega_{00}) -$$
$$- x\left(\frac{1}{2}x^2 + mx^5 + \dots\right)\omega_{10} - \left(\frac{1}{2}x^2 + mx^5 + \dots\right)^2\omega_{20} =$$
$$= (x + 5mx^4 + 7hx^6 + \dots)\Big[\omega_{01} + x(\omega_{11} - \omega_{00}) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}x^2 + mx^5 + \dots\right)\omega_{21} - x^2\omega_{10} -$$
$$- x\left(\frac{1}{2}x^2 + mx^5 + \dots\right)\omega_{20}\Big] - dh\,x^7 + \dots,$$

последовательно находим:

$$\omega_{02} = 0,\ \omega_{12} = \omega_{01},\ \omega_{11} = 0,\ \omega_{21} = \omega_{10},\ \omega_{20} = 20m\omega_{01}$$

и далее

$$\omega_{00} = 0, \quad -\frac{1}{2}m\omega_{21} + 7h\omega_{01} = 0.$$

Если положить $m = -\frac{1}{20}$ и $h = \frac{1}{280}k$, то найдутся компоненты инфинитезимальных смещений репера Френе. Таким образом, имеем *приведенное уравнение*

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \dots,$$

где k — проективная кривизна. Ось y будет *проективной нормалью.*

Геометрическое определение репера Френе и геометрическая характеристика проективной дуги и проективной кривизны могут быть сделаны, если исходить из приведенного уравнения. Ограничимся тем, что отметим, вместе с Альфаном (*Halphen*), способ, которым это можно сделать, если использовать кубическую кривую с двойной точкой в точке A, одна из ветвей которой в этой точке имеет с кривой касание шестого порядка; эта кривая имеет уравнение

$$2xy - x^3 + \frac{4}{5}y^3 = 0;$$

мы видим, что вторая касательная в двойной точке будет проективной нормалью и что прямая перегиба будет третьей стороной $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ репера Френе. Рассмотрение пучка кубических кривых с общей *точкой Альфана,* имеющих в точке A с кривой касание шестого порядка, позволяет охарактеризовать и проективную кривизну.

Часть третья

СТРУКТУРНЫЕ КОНСТАНТЫ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП

Глава XI

УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ Э. КАРТАНА

I. ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ ДАРБУ

152. Относительные компоненты перемещения репера, зависящего только от одного параметра, являются произвольными формами Пфаффа (теорема структуры п. 77, стр. 178). Этого не будет, когда репер зависит от нескольких параметров. Впервые это отметил Дарбу, когда он инфинитезимально изучал поверхности методом подвижного триэдра. Напомним его вычисления *.

Пусть дан подвижной триэдр, зависящий от двух параметров u и v. Относительные компоненты ω его инфинитезимального перемещения определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_1\mathbf{I}_1 + \omega_2\mathbf{I}_2 + \omega_3\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_1 &= \omega_{12}\mathbf{I}_2 - \omega_{31}\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_2 &= -\omega_{12}\mathbf{I}_1 + \omega_{23}\mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= \omega_{31}\mathbf{I}_1 - \omega_{23}\mathbf{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Откажемся на время от использования форм Пфаффа и положим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \xi du + \xi_1 dv, & \omega_2 &= \eta du + \eta_1 dv, & \omega_3 &= \zeta du + \zeta_1 dv, \\ \omega_{23} &= p du + p_1 dv, & \omega_{31} &= q du + q_1 dv, & \omega_{12} &= r du + r_1 dv, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

* G. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, т. I, кн. 1, гл. V и VII.

где ξ, ξ_1, η, η_1, ζ, ζ_1, p, p_1, q, q_1, r, r_1 — функции переменных u и v. Система (1) распадается на две системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} &= \xi \mathbf{I}_1 + \eta \mathbf{I}_2 + \zeta \mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial u} &= r\mathbf{I}_2 - q\mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial u} &= -r\mathbf{I}_1 + p\mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial u} &= q\mathbf{I}_1 - p\mathbf{I}_2;
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} &= \xi_1 \mathbf{I}_1 + \eta_1 \mathbf{I}_2 + \zeta_1 \mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial v} &= r_1\mathbf{I}_2 - q_1\mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial v} &= -r_1\mathbf{I}_1 + p_1\mathbf{I}_3, \\
\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial v} &= q_1\mathbf{I}_1 - p_1\mathbf{I}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из первого уравнения (3) получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v}\mathbf{I}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\mathbf{I}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\mathbf{I}_3 + \xi\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial v} + \eta\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial v},$$

откуда, принимая во внимание три последних уравнения (4), имеем:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u\, \partial v} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\zeta - r_1\eta\right)\mathbf{I}_1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} + r_1\xi - p_1\zeta\right)\mathbf{I}_2 + \\ + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} + p_1\eta - q_1\xi\right)\mathbf{I}_3,$$

а аналогичный подсчет с помощью первого уравнения (4) и трех последних уравнений (3) дает нам:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v\, \partial u} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\zeta_1 - r\eta_1\right)\mathbf{I}_1 + \\ + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u} + r\xi_1 - p\zeta_1\right)\mathbf{I}_2 + \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial u} + p\eta_1 - q\xi_1\right)\mathbf{I}_3.$$

Отождествление этих двух выражений $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u\, \partial v}$ дает три соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= (q\zeta_1 - q_1\zeta) - (r\eta_1 - r_1\eta),\\
\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} &= (r\xi_1 - r_1\xi) - (p\zeta_1 - p_1\zeta),\\
\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= (p\eta_1 - p_1\eta) - (q\xi_1 - q_1\xi).
\end{aligned}\right\} \qquad (5_1)$$

Точно так же можно получить из систем (3) и (4) два выражения для каждой из двух вторых частных производных

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}_1}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{I}_2}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{I}_3}{\partial u\, \partial v};$$

имеем, например:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}_1}{\partial u\, \partial v} = -(qq_1 + rr_1)\,\mathbf{I}_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial v} + p_1 q\right)\mathbf{I}_2 + \left(-\frac{\partial q}{\partial v} + rp_1\right)\mathbf{I}_3,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}_1}{\partial v\, \partial u} = -(qq_1 + rr_1)\,\mathbf{I}_1 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} + pq_1\right)\mathbf{I}_2 + \left(-\frac{\partial q_1}{\partial u} + r_1 p\right)\mathbf{I}_3.$$

Отождествляя эти вторые частные производные, получаем три новых соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - q_1 r,\\
\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - r_1 p,\\
\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - p_1 q.
\end{aligned}\right\} \qquad (5_2)$$

Компоненты ω не имеют, следовательно, произвольной структуры: они удовлетворяют* *уравнениям Дарбу* (5).

Структура относительных компонент смещения подвижного репера играет основную роль во всех вопросах, которые мы будем рассматривать, ибо семейства реперов, которые туда входят, зависят от нескольких параметров. Задача этой главы — определить эту структуру.

---

* Дарбу доказывает, что это единственные соотношения, которые накладываются на эти компоненты, что просто является следствием теоремы структуры, доказанной ниже в п. **163** (стр. 287).

Уравнения Дарбу (5) сложны. Эта сложность зависит от того, что не были использованы обозначения дифференциалов: частный выбор независимых переменных u и v играет кажущуюся роль. Мы избежим этого неудобства, используя подходящие символы.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ; ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

153. Понятие дифференциала. Пусть даны n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Будем называть системой дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ от этих переменных систему n функций, аргументами которых будут $x_1, \ldots, x_n$ и произвольное число новых переменных. Дифференциал функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, по определению, будет равен

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Предположим, что в качестве новых независимых переменных взамен $x_1, \ldots, x_n$ мы принимаем n функций $y_1, \ldots, y_n$ от $x_1, \ldots, x_n$. Условимся присоединять к ним их же дифференциалы

$$dy_i = \sum_k \frac{\partial y_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} dx_k.$$

По правилу дифференцирования функций от функций, благодаря этому условию, получим, что df будет величиной, независимой от выбора независимых переменных.

Из этой инвариантности дифференциала df при замене переменных вытекают правила, которые указывают, как замена переменных преобразует производные от функции.

154. Одновременное употребление двух систем дифференциалов. Нам будет полезно присоединить к каждой переменной x_i одновременно два дифференциала dx_i и δx_i. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет иметь, следовательно, два дифференциала df и δf. Мы будем действовать* символом δ над дифференциалами dx_i и символом d над дифференциалами δx_i. Определим для этого дифференциалы δ переменных, которые отличны от $x_1, \ldots, x_n$ и от которых зависят dx_i, и дифференциалы d переменных, которые отличны от $x_1, \ldots, x_n$ и от которых зависят δx_i. Мы всегда будем предполагать, что можно всегда выполнить этот выбор так, что

$$d\,\delta x_i = \delta\, dx_i. \tag{6}$$

---

* Наоборот, абсолютно бесполезно употреблять символы $d^2 f$ и $\delta^2 f$.

a. Предположим, например, что дифференциалы dx_i и δx_i *определены*, т. е. существуют функции $\xi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $\eta_i(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$. Условие (6) напишется тогда в виде

$$\sum_k \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \eta_k - \xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} \right) = 0.$$

b. Предположим, наоборот, что $dx_1, \ldots, dx_n$, $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ будут *неопределенными*, т. е. образуют $2n$ новых переменных. Чтобы удовлетворить соотношениям (6), достаточно тогда произвольно определить $d\delta x_i = \delta dx_i$.

c. Предположим, наконец, что дифференцирование d определено и что дифференцирование δ будет неопределенным. Выражения δdx_i могут быть определены произвольно. Надо выбрать, следовательно, $d\delta x_i = \delta dx_i$.

Если соотношение (1) удовлетворено, символы d и δ называются *перестановочными*. Мы будем иметь тогда:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad \delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i,$$

$$\delta df = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \delta x_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta\, dx_i,$$

$$d\delta f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i dx_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\delta x_i.$$

Следовательно,

$$d\,\delta f = \delta\, df. \tag{7}$$

Это соотношение, приложенное к новым независимым переменным $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$, доказывает, что если два дифференцирования перестановочны, то они будут перестановочны и после замены переменных.

Введение двух перестановочных дифференцирований в замечательно простом виде уравнений (7) позволило выразить тот факт, что можно изменять порядок дифференцирования. Однако это и есть то обстоятельство, которое лежит в основе всех рассуждений настоящей главы; оно лежит в основе вычислений Дарбу: уравнения (5) выражают, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial v\, \partial u}.$$

Примечание. Выписываемые нами соотношения будут всегда удовлетворяться, каков бы ни был частный выбор символов dx_i, δx_i, для которых $d\delta x_i = \delta dx_i$. Нам будет тем не менее полезно в различные моменты выполнить такой выбор. Напомним, например, что если все dx_i будут бесконечно

малыми приращениями переменных, то df — главная часть соответствующего приращения функции f.

155. Внешнее дифференцирование. Пусть дана форма Пфаффа

$$\omega(x, dx) = \sum_k a_k(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k. \tag{8}$$

Рассмотрим выражение

$$d\omega(x, \delta x) - \delta\omega(x, dx) = \sum_k (da_k \delta x_k - \delta a_k dx_k) =$$

$$= \sum_{i, k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} (dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k) =$$

$$= \sum_{(i, k)} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) (dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k)^*. \tag{9}$$

В силу (7), необходимым условием того, чтобы форма ω была полным точным дифференциалом, состоит в том, чтобы это выражение (9) было нулем; мы докажем, впрочем, что это условие будет и достаточным (п. **166**, третье следствие теоремы Фробениуса, стр. 292).

Соотношение (7) должно играть основную роль, выражение (9) будет часто нам встречаться, мы будем обозначать его укороченным символом:

$$\omega'(x, dx, \delta x) = d\omega(x, \delta x) - \delta\omega(x, dx). \tag{10}$$

Выражение ω' остается инвариантным при изменении выбора независимых переменных; мы будем называть ω' *внешней производной,* или *билинейным ковариантом формы* ω.

156. Внешние произведения. Внешняя производная ω' линейно зависит от каждой из серий переменных $dx_1, \ldots, dx_n$; $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$; ω' меняет знак, если эти две серии переменных поменять местами. Функция, обладающая этими двумя свойствами, называется *билинейной альтернированной функцией.*

В билинейную альтернированную относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$; $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ функцию эти переменные входят только в виде определителей $dx_i \delta x_j - \delta x_i dx_j$. Каждому из этих определителей будем давать укороченное обозначение

---

* Суммирование $\sum\limits_{i, k}$ распространяется на все пары индексов $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Суммирование $\sum\limits_{(i, k)}$ распространяется на все пары индексов $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$.

$[dx_i\ dx_j]$ и называть внешним произведением dx_i на dx_j. Это внешнее произведение меняет знак при изменении порядка множителей. Мы будем считать это произведение дистрибутивным по отношению к сложению, так что внешнее произведение двух форм

$$\omega_i = \sum_i a_i(x)\,dx_i, \quad \tilde{\omega}_i = \sum_i b_i(x)\,dx_i,$$

по определению, будет равно

$$[\omega\tilde{\omega}] = \sum_{i,j} a_i b_j\,[dx_i dx_j] =$$

$$= \sum_{(i,j)} (a_i b_j - a_j b_i)\,[dx_i dx_j] = \omega(dx)\,\tilde{\omega}(\delta x) - \omega(\delta x)\,\tilde{\omega}(dx).$$

Очевидно имеем, следовательно, что

$$[\omega\tilde{\omega}] = -[\tilde{\omega}\omega] \text{ и } [\omega\omega] = 0.$$

Формула (9) теперь будет писаться в виде

$$\omega' = \sum_{(i,j)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)[dx_i dx_j].$$

Читатель легко установит следующую формулу: пусть дана функция m и форма Пфаффа ω; внешняя производная произведения $m\omega$ равна

$$(m\omega)' = [dm\ \omega] + m\omega'. \tag{11}$$

Примечание. Понятие билинейного коварианта введено Фробениусом; оно лежит в основе теории систем Пфаффа. Внешнее умножение было определено Грассманом. Более полное изложение этих понятий можно найти в книге: E. Cartan. *Leçons sur les Invariants intègraux* (Hermann, 1922, главы V и VI).

III. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ Э. КАРТАНА. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ГРУПП

157. Определение постоянных структуры. Рассмотрим конечную непрерывную группу преобразований S_a. Пусть $\omega_1(a, da), \ldots, \omega_r(a, da)$ — относительные компоненты инфинитезимального перемещения ее подвижного репера.

Первая группа параметров оставляет эти r форм инвариантными (п. **80**, стр. 183). Другими словами, рассмотрим фиксированное преобразование S_a, переменное преобразование S_ξ и произведение этих преобразований $S_{\xi'} = S_a S_\xi$. Мы имеем:

$$\omega_s(\xi', d\xi') = \omega_s(\xi, d\xi) \quad (s = 1, \ldots, r). \tag{12}$$

Это соотношение (12) дает

$$d\omega_s(\xi', \delta\xi') - \delta\omega_s(\xi', d\xi') = d\omega_s(\xi, \delta\xi) - \delta\omega_s(\xi, d\xi). \tag{13}$$

Следовательно, первая группа параметров оставляет равным образом инвариантными внешние производные ω_s' r компонент ω_s.

Но каждая из этих внешних производных будет билинейной альтернированной формой по отношению к дифференциалам независимых переменных, следовательно, также и относительно форм ω_s; мы имеем поэтому:

$$\omega_s'(\xi, d\xi, \delta\xi) = \sum_{(p,\,q)} c_{pqs}(\xi)\,[\omega_p(\xi, d\xi)\,\omega_q(\xi, d\xi)], \tag{14}$$

где

$$c_{pqs}(\xi) + c_{qps}(\xi) = 0; \tag{15}$$

точно так же

$$\omega_s'(\xi', d\xi', \delta\xi') = \sum_{(p,\,q)} c_{pqs}(\xi')\,[\omega_p(\xi', d\xi')\,\omega_q(\xi', d\xi')]. \tag{14'}$$

Соотношение (13) выражает равенство левых частей (14) и (14′). Чтобы правые части были равны, необходимо, в силу (12) и (15), чтобы

$$c_{pqs}(\xi') = c_{pqs}(\xi).$$

Но мы можем выбрать в качестве ξ и ξ' две произвольные точки пространства параметров. Величины $c_{pqs}(\xi)$ будут, следовательно, независимыми от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Эти постоянные величины $c_{pqs} = -c_{qps}$ $(1 \leqslant p < q \leqslant r)$ будут $\frac{r^2(r-1)}{2}$ *«структурными константами»* рассматриваемой r-параметрической группы.

Соотношения (14) выражают, что относительные компоненты ω_s смещения подвижного репера подчинены условию удовлетворять соотношениям

$$\omega_s' = \sum_{(p,\, q)} c_{pqs} [\omega_p \omega_q]. \qquad (16)$$

Соотношения (22) п. **75** (стр. 176) позволяют вывести из этих соотношений (16), что абсолютные компоненты $\widetilde{\omega}_s$ удовлетворяют соотношениям

$$\widetilde{\omega}_s' = -\sum_{(p,\, q)} c_{pqs} [\widetilde{\omega}_p \widetilde{\omega}_q]. \qquad (17)$$

Уравнения (16) [и (17)] были впервые выписаны Маурером [3]; они первоначально назывались *уравнениями Маурера*. Э. Картан же обнаружил, что эти уравнения показывают структуру компонент ω_s и $\widetilde{\omega}_s$ (теорема структуры п. **163**, стр. 287). Поэтому теперь уравнения (16) [и (17)] носят название *уравнений структуры Э. Картана*.

Замечание. Линейная подстановка, выполненная над формами ω_s, линейно преобразует структурные константы.

158. Уравнения структуры группы линейных подстановок

$$x' = ax + b \quad (a > 0).$$

В силу пп. **71** (стр. 170) и **74** (стр. 175), имеем:

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{a}, \quad \widetilde{\omega}_1 = \frac{da}{a}, \quad \widetilde{\omega}_2 = db - b\frac{da}{a},$$

откуда

$$\omega_1' = 0, \;\; \omega_2' = -\frac{1}{a^2}[da\, db], \;\; \widetilde{\omega}_1' = 0, \;\; \widetilde{\omega}_2' = \frac{1}{a}[da db].$$

Следовательно, уравнениями структуры будут уравнения:

$$\omega_1' = 0, \;\; \omega_2' = -[\omega_1\omega_2] \;\text{ и }\; \widetilde{\omega}_1' = 0, \;\; \widetilde{\omega}_2' = [\widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2];$$

отсюда следует, что

$$c_{121} = 0, \quad c_{122} = -1.$$

159. Уравнения структуры проективной группы плоскости. Восемь относительных компонент определяются геометрически посредством уравнений (16) и (17) п. 73 (стр. 173):

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_{00}(d)\,\mathbf{A} + \omega_{01}(d)\,\mathbf{A}_1 + \omega_{02}(d)\,\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_1 &= \omega_{10}(d)\,\mathbf{A} + \omega_{11}(d)\,\mathbf{A}_1 + \omega_{12}(d)\,\mathbf{A}_2, \\ d\mathbf{A}_2 &= \omega_{20}(d)\,\mathbf{A} + \omega_{21}(d)\,\mathbf{A}_1 + \omega_{22}(d)\,\mathbf{A}_2, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\omega_{00}(d) + \omega_{11}(d) + \omega_{22}(d) = 0. \tag{19}$$

Напишем, что

$$d\,\delta\mathbf{A} - \delta\,d\mathbf{A} = 0.$$

Мы получим:

$$\omega'_{00}\mathbf{A} + \omega'_{01}\mathbf{A}_1 + \omega'_{02}\mathbf{A}_2 - [\omega_{00}\,d\mathbf{A}] - [\omega_{01}\,d\mathbf{A}_1] - [\omega_{02}\,d\mathbf{A}_2] = 0.$$

Заменим $d\mathbf{A}$, $d\mathbf{A}_1$, $d\mathbf{A}_2$ их выражениями (18); будем иметь

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\{\omega'_{00} - [\omega_{01}\omega_{10}] - [\omega_{02}\omega_{20}]\} + \\ + \mathbf{A}_1\{\omega'_{01} - [\omega_{00}\omega_{01}] - [\omega_{01}\omega_{11}] - [\omega_{02}\omega_{21}]\} + \\ + \mathbf{A}_2\{\omega'_{02} - [\omega_{00}\omega_{02}] - [\omega_{01}\omega_{12}] - [\omega_{02}\omega_{22}]\} = 0; \end{gathered}$$

каждая скобка должна равняться нулю и давать уравнение структуры. Другие уравнения структуры получатся, если записать, что

$$d\,\delta\mathbf{A}_1 - \delta\,d\mathbf{A}_1 = 0, \quad d\,\delta\mathbf{A}_2 - \delta\,d\mathbf{A}_2 = 0.$$

Окончательно этими уравнениями структуры будут следующие уравнения:

$$\omega'_{ij} = \sum_{k=0}^{2} [\omega_{ik}\omega_{kj}] \qquad (i, j = 0, 1, 2). \tag{20}$$

160. Уравнения структуры аффинной группы пространства (см. п. 72, стр. 172). Аффинный репер образуется точкой A и тремя линейно независимыми векторами $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$. Двенадцать относительных компонент его смещения геометрически определяются с помощью формул

$$d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \mathbf{I}_k, \tag{21}$$

$$dI_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} I_k. \qquad (22)$$

Записывая, что $d\,\delta I_i - \delta\, dI_i = 0$, мы получим, как и в предыдущем пункте, 9 уравнений структуры:

$$\omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} [\omega_{ik}\omega_{kj}]. \qquad (23)$$

Запишем, с другой стороны, что

$$d\,\delta A - \delta\, dA = 0;$$

тогда будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{3} \omega'_k I_k - \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} [\omega_k\, dI_k] = 0,$$

откуда, заменяя dI_k их выражениями (22), получим три других уравнения структуры:

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^{3} [\omega_k \omega_{ki}]. \qquad (24)$$

Уравнения (23) и (24) образуют совокупность уравнений структуры.

Аффинная унимодулярная группа, аффинная группа плоскости, группа движений пространства — подгруппы проективной группы, характеризуемые уравнениями $\omega_{i0} = 0$ и, кроме того, соответственно уравнениями (см. п. **125**, стр. 240)

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0, \qquad (25)$$

$$\omega_3 = 0,\ \omega_{13} = 0,\ \omega_{31} = 0,\ \omega_{23} = 0,\ \omega_{32} = 0,\ \omega_{33} = 0, \qquad (26)$$

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \qquad (27)$$

Их реперы будут частными случаями проективного репера, к которым применяются вычисления этого пункта. Следовательно, уравнениями структуры этих трех групп будут уравнения (23) и (24), в которых, разумеется, надо учесть соответствующие из уравнений (25), (26), (27).

Рассмотрим группу движений пространства. Выразим компоненты ω, как указано в формулах (2); небольшая вы-

кладка показывает, что формулы (23) и (24) превращаются тогда в уравнения Дарбу (5_2) и (5_1). Эти *уравнения Дарбу*, играющие основную роль в дифференциальной геометрии поверхностей евклидова пространства, являются, следовательно, частным видом уравнений структуры.

161. Уравнения структуры группы гомографических подстановок

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad - bc > 0).$$

В силу уравнений (9) главы VIII (п. **108**, стр. 216), имеем

$$\omega_1 = u\,dx, \quad \omega_2 = 2v\,dx - \frac{du}{u}, \quad \omega_3 = \frac{v^2}{u}\,dx - \frac{dv}{u},$$

откуда

$$\omega_1' = [du\,dx], \ \omega_2' = 2\,[dv\,dx],$$

$$\omega_3' = \frac{2v}{u}\,[dv\,dx] - \frac{v^2}{u^2}\,[du\,dx] + \frac{1}{u^2}\,[du\,dv].$$

Но

$$[\omega_1\omega_2] = [du\,dx], \ [\omega_1\omega_3] = [dv\,dx],$$

$$[\omega_2\omega_3] = \frac{2v}{u}\,[dv\,dx] - \frac{v^2}{u^2}\,[du\,dx] + \frac{1}{u^2}\,[du\,dv].$$

Следовательно, уравнениями структуры будут уравнения

$$\omega_1' = [\omega_1\omega_2], \ \omega_2' = 2\,[\omega_1\omega_3], \ \omega_3' = [\omega_2\omega_3]. \tag{28}$$

162. Одна теорема относительно систем Пфаффа. В настоящем пункте устанавливаются три существенные теоремы, в которые входят постоянные структуры. Эти теоремы будут непосредственными следствиями следующей теоремы интегрального исчисления.

Ф о р м у л и р о в к а т е о р е м ы. Пусть даны r линейно независимых форм от r переменных $\omega_s\,(a,\ da)$; пусть даны также r других форм от ρ переменных $\overset{*}{\omega}_s\,(u,\ du)$ $(\rho \leqslant r)$. Предположим, что две системы форм ω_s и $\overset{*}{\omega}_s$ удовлетворяют одним и тем же уравнениям структуры:

$$\omega_s' = \sum_{(p,q)} c_{pqs}\,[\omega_p\omega_q], \quad \overset{*}{\omega}{}_s' = \sum_{(p,q)} c_{pqs}\,[\overset{*}{\omega}_p\overset{*}{\omega}_q],$$

где c_{pqs} — постоянные. Тогда в качестве $a_1, \ldots, a_r$ можно одним и только одним способом выбрать функции от $u_1, \ldots, u_\rho$, которые удовлетворяют системе

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*(u, du) \tag{29}$$

и которые присоединяют заданную точку a^0 к произвольно заданной точке u^0.

Доказательство. Рассмотрим точку $u(t)$, зависящую от параметра t и совпадающую с u^0 при $t=0$. Дифференциальная система

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*[u(t), du(t)] \qquad (s = 1, \ldots, r) \tag{30}$$

может быть разрешена относительно дифференциалов da_s, которые выразятся через $a_1, \ldots, a_r, t, dt$. Она обладает одним и только одним решением $a_1(t), \ldots, a_r(t)$, для которого $a_1(0), \ldots, a_r(0)$ будут координатами точки a^0. Точка $a(t)$, имеющая координатами $a_1(t), \ldots, a_r(t)$, соответствует точке $u(t)$ в искомом соответствии, если только оно возможно.

Предположим теперь, что точка u зависит не только от t, а также от второго параметра θ. Компоненты $\frac{\partial a_s}{\partial \theta}$ вектора $\frac{\partial a}{\partial \theta}$ получаются в результате интегрирования продифференцированной системы (30):

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\, \omega_s\left(a, \frac{\partial a}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\, \omega_s^*\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{31}$$

Эти уравнения (31) относительно неизвестных $\frac{\partial a_s(t, \theta)}{\partial \theta}$ образуют линейную дифференциальную систему; начальными значениями неизвестных будут значения

$$\frac{\partial a_s(0, \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Поскольку два дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ переместительны, в силу уравнений структуры Картана мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\, \omega_s\left(a, \frac{\partial a}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\, \omega_s\left(a, \frac{\partial a}{\partial \theta}\right) =$$
$$= \sum_{p,q} c_{pqs}\omega_p\left(a, \frac{\partial a}{\partial \theta}\right) \omega_q\left(a, \frac{\partial a}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\,\omega_s^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\,\omega_s^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\sum_{p,q}c_{pqs}\omega_p^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\omega_q^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

В силу (30), последние множители $\omega_q\left(a,\ \frac{\partial a}{\partial t}\right)$, $\omega_q^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ равны. Следовательно, уравнения (31) можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\omega_s\left(a,\ \frac{\partial a}{\partial\theta}\right)-\omega_s^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{p,q}c_{pqs}\left\{\omega_p\left(a,\ \frac{\partial a}{\partial\theta}\right)-\omega_p^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\}\omega_q^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)=0.$$

Скобки, равные нулю при $t=0$, будут нулями, каково бы ни было значение t. Решения $\frac{\partial a_s}{\partial\theta}$ системы (31) получаются, следовательно, если разрешить систему

$$\omega_s\left(a,\ \frac{\partial a}{\partial\theta}\right)=\omega_s^*\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\right). \tag{32}$$

Эти уравнения (32) показывают, что точка $a(t)$, присоединенная к точке $u(t)$, остается неподвижной при непрерывном изменении точек $u(t')$, соответствующих значениям t', отличным от 0 и t; следовательно, соответствие, существующее между точками $u(t)$ и $a(t)$, однозначно. Кроме того, уравнения (32) выражают, что это соответствие удовлетворяет уравнениям (29). Мы уже отмечали, что это единственно возможное соответствие.

Таким образом, теорема доказана.

Примечание. Только что проведенные рассуждения требуют уточнить формулировку теоремы следующими предположениями, которые являются *достаточными*:

1°. Пространство точек u просто связно, т. е. всякий замкнутый контур в нем непрерывно стягивается в точку.

2°. Пространство точек a содержит только внутренние точки.

3°. Когда интеграл $\int\limits_L \sqrt{\sum\limits_S \omega_s^2}$, распространенный на некоторый путь L в пространстве точек a, остается ограничен-

ным, этот путь сходится к некоторой точке этого пространства.

Необходимость этого третьего предположения демонстрирует следующий пример, где $r=1$:

$$\omega_1(a, da) = \frac{da}{1+a^2}, \quad \omega_1^*(u, du) = du,$$

пространство точек a и пространство точек u образованы двумя безграничными прямыми, порождаемыми точками с абсциссами a и u. Если точке $u=0$ поставить в соответствие точку $a=0$, то равенство $\omega_1(a, da) = \omega_1^*(u, du)$ дает

$$a = \operatorname{tg} u;$$

оно ставит в соответствие точке a только точки u интервала

$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2},$$

и интеграл

$$\int \omega_1(a, da) = \int \frac{da}{1+a^2}$$

действительно остается ограниченным, когда a неограниченно увеличивается, что противоречит условию 3°.

Если предположение 3° удовлетворено, то интегрирование дифференциальной системы (30) могло бы продолжаться шаг за шагом бесконечно. Действительно, предположим, что это не так, и пусть t_0 — нижняя граница значений t, которые не могли бы быть достигнуты интегрированием. Если t стремится к t_0 при своих меньших значениях, то в пространстве значений a имеется линия L, для которой интеграл $\int \sqrt{\sum\limits_s \omega_s^2}$ остается ограниченным, так как он меньше конечного интеграла $\int\limits_{t=0}^{t=t_0} \sqrt{\sum\limits_s [\omega_s^*(u, du)]^2}$; следовательно, эта линия L стремится к точке (a), которая соответствует значению $t=t_0$, и начиная с него можно продолжить интегрирование.

Предположение 3° несомненно удовлетворено, если риманово пространство, образованное пространством точек a, снабженным метрикой $ds^2 = \sum\limits_s [\omega_s(a, da)]^2$, будет *нормальным*, т. е. если всякое бесконечное *ограниченное* множество точек

его допускает предельную точку *, принадлежащую этому же множеству.

163. Предположим, что в теореме предыдущего пункта величины $\omega_s(a, da)$ будут относительными компонентами инфинитезимального смещения репера r-параметрической группы и что формы $\overset{*}{\omega}_s(u, du)$ удовлетворяют уравнениям структуры этой группы. Доказанная в п. **162** теорема означает, что существует семейство реперов с параметрами $a_1(u), \ldots, a_r(u)$, относительное инфинитезимальное смещение которого имеет компоненты

$$\omega_1^*(u, du), \ldots, \omega_r^*(u, du).$$

Это семейство определено с точностью до выбора точки a^0, т. е. с точностью до преобразования группы. Это согласуется с основным условием равенства (п. **76**, стр. 177).

Эта теорема может быть следующим образом интерпретирована геометрически (ср. п. **77**, стр. 178).

Теорема структуры. *Относительные компоненты инфинитезимального смещения подвижного репера заданной группы подчинены только условию удовлетворять уравнениям структуры Э. Картана:*

$$\omega_s' = \sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p \omega_q].$$

164. Рассмотрим теперь две r-параметрические группы, которые имеют одни и те же постоянные структуры и пространства параметров которых просто связны. Будем называть формы $\omega_s(a, da)$ и $\overset{*}{\omega}_s(u, du)$ относительными компонентами инфинитезимального смещения реперов этих двух групп. Теорема п. **162** утверждает, что между точками u и точками a можно установить взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее уравнениям

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*(u, du).$$

---

* См. Э. Картан (E. Cartan). *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier — Villars, 1928, 2-me edition revue et augmente, 1946.

[Имеется русский перевод первого издания: Э. Картан. *Лекции по геометрии римановых пространств.* ОНТИ, 1930; см. также *«Риманова геометрия в ортогональном репере»* (по лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926—1927 гг.). Изд-во МГУ, 1960; последняя книга содержит главы, имеющиеся во французском издании 1946 г. и не вошедшие в русское издание 1930 г. *(Прим. перев.)*].

Преобразования первой и второй групп характеризуются свойством оставлять инвариантными соответственно формы ω_s и $\overset{*}{\omega}_s$. Следовательно, соответствие, установленное между точками a и точками u, делает соответствующими эти преобразования: оно образует голоэдрический изоморфизм.

Обратно, две голоэдрически изоморфные группы имеют одну и ту же группу параметров и, следовательно, одни и те же структурные константы. Отсюда получаем

Необходимое и достаточное условие изоморфизма. *Пусть даны две группы, пространства параметров которых просто связны*. Для того чтобы они были голоэдрически изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же структурные константы.*

165. Предположим, наконец, что в теореме п. **162** формы $\overset{*}{\omega}_s$ тождественно равны формам ω_s.

Доказательство теоремы может быть тогда дополнено таким образом, чтобы сделать излишним предположение о том, что пространство точек просто связно.

Теорема рассматривает преобразования этого пространства, которые оставляют инвариантными формы ω_s. Эти преобразования, очевидно, образуют группу. Теорема состоит в доказательстве того, что в рассматриваемом случае эта группа оперирует транзитивно над пространством точек a: она зависит от r параметров; в таком случае это группа параметров (см. п. 83, стр. 186).

Другими словами, имеет место следующая

Вторая основная теорема теории групп (Э. Картана).** *Пусть даны r форм Пфаффа $\omega_s(a, da)$ от r переменных. Чтобы преобразования, которые оставляют их инвариантными, образовывали r-параметрическую группу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1°. *Формы ω_s удовлетворяли уравнениям структуры Э. Картана:*

---

* Всякая группа G мериэдрически изоморфна некоторой группе Γ, пространство параметров которой просто связно. Построим то, что в топологии называется «просто связным накрывающим многообразием» пространства параметров группы G; Γ есть группа преобразований этого пространства, оставляющая инвариантными формы Пфаффа, которые оставляет инвариантными группа параметров группы G [15].

** Когда излагают теорию групп так, как это делал С. Ли, то название «Вторая основная теорема» присоединяется к теореме, которая будет сформулирована в п. **211** (стр. 352) под названием «Дополнение ко второй основной теореме».

$$\omega_s' = \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\omega_p \omega_q].$$

2°. *Пространство точек a обладало только внутренними точками. Когда интеграл $\int_L \sqrt{\sum_{s=1}^r |\omega_s|^2}$ конечен, путь L сходится в некоторую точку этого пространства. Формы $\omega_s(a, da)$ линейно независимы в каждой точке a.*

166. Дополнения. Мы покажем, как наиболее важные результаты этой главы (пп. **57** и **162**) можно вывести из общей теоремы о формах Пфаффа.

Теорема Фробениуса. *Пусть даны пространство R измерений, с координатами $X_1, \ldots, X_R$ и $N(<R)$ линейно независимых форм Пфаффа $\Pi_1(X, dX), \ldots, \Pi_N(X, dX)$. Чтобы система Пфаффа*

$$\Pi_1(X, dX) = 0, \ldots, \Pi_N(X, dX) = 0 \tag{33}$$

была вполне интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы внешние производные $\Pi_1'(X, dX, \delta X), \ldots, \Pi_N'(X, dX, \delta X)$ обращались в нуль для всякого выбора дифференциалов $dX_1, \ldots, dX_R$, $\delta X_1, \ldots, \delta X_R$, которые обращают в нуль формы $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$.

Эту теорему можно установить с помощью рассуждений, близких к рассуждениям пп. **151** и **162**. Но, чтобы изменить изложение, мы докажем ее с помощью замены координат и преобразования системы (33) в эквивалентную систему.

Доказательство. Замена координат оставляет инвариантным свойство системы быть вполне интегрируемой; она оставляет инвариантными внешние производные, следовательно, и условие Фробениуса.

Две системы Пфаффа называются эквивалентными, если в каждой точке $X_1, \ldots, X_R$ существуют одни и те же дифференциалы $dX_1, \ldots, dX_R$, которые им удовлетворяют. Они вполне интегрируемы одновременно.

Пусть даны две эквивалентные системы: (33) и

$$\Pi_1^*(X, dX) = 0, \ldots, \Pi_N^*(X, dX) = 0. \tag{33*}$$

Формы $\Pi_1^*, \ldots, \Pi_N^*$ получаются из форм $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$ с помощью линейной подстановки с коэффициентами в виде функций от $X_1, \ldots, X_R$:

$$\Pi_i^*(X, dX) = A_{i1}(X)\Pi_1(X, dX) + \ldots + A_{iN}(X)\Pi_N(X, dX).$$

Отсюда

$$\Pi_i^{*\prime} = A_{i1}\Pi_1' + \ldots + A_{iN}\Pi_N' + [dA_{i1}\Pi_1] + \ldots + [dA_{iN}\Pi_N].$$

Предположим, что система (33) удовлетворяет условию Фробениуса: тогда написанные выше скобки обращаются в нуль, когда дифференциалы $dX_1, \ldots, dX_R$, $\delta X_1, \ldots, \delta X_R$ удовлетворяют уравнениям (33). Условие Фробениуса, следовательно, имеет место одновременно для двух эквивалентных систем.

Докажем теперь, что вполне интегрируемая система (33) удовлетворяет условию Фробениуса. Можно выбрать, в окрестности точки, такие новые координаты $U_1, \ldots, U_R$, что уравнения интегральных многообразий примут вид $U_1 = \text{const}, \ldots$ $\ldots, U_N = \text{const}$. Система (33) алгебраически эквивалентна системе вида

$$dU_1 = 0, \ldots, dU_N = 0. \tag{34}$$

Внешние производные от $dU_1, \ldots, dU_N$ будут тождественно равны нулю. Система (34), а, следовательно, и система (33) удовлетворяют условию Фробениуса, ч. т. д.

Докажем теперь, что система (33) будет вполне интегрируемой, если она удовлетворяет условию Фробениуса.

Когда $R = N+1$, система (33) будет системой N дифференциальных уравнений с N неизвестными и одной независимой переменной. Через каждую точку проходит одна интегральная кривая. Система (33) будет поэтому вполне интегрируемой системой.

Следовательно, мы можем действовать рекуррентно, предположив, что предложение доказано для $R-1$ измерений и N уравнений. Система (33), если в ней заменить X_R постоянной величиной, будет вполне интегрируема, по предположению. Если ввести новую систему координат $U_1, \ldots, U_{R-1}$, X_R, то в окрестности данной точки интегралы этой системы будут иметь уравнения

$$U_1 = \text{const}, \ldots, U_N = \text{const}, \ X_R = \text{const}.$$

Система (33), записанная в новой системе координат, необходимо эквивалентна системе вида

$$dU_1 - A_1\, dX_R = 0, \ldots, dU_N - A_N\, dX_R = 0. \tag{35}$$

В силу предположений, эта система (35) должна удовлетворять условию Фробениуса; следовательно, внешнее произведение

$$[dA_1 dX_R] = \frac{\partial A_1}{\partial U_1}[dU_1\, dX_R] + \ldots + \frac{\partial A_1}{\partial U_{R-1}}[dU_{R-1}\, dX_R]$$

обращается в нуль, если принять во внимание уравнения системы (35). Поэтому

$$\frac{\partial A_1}{\partial U_{N+1}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial A_1}{\partial U_{R-1}} = 0.$$

$A_1, \ldots, A_N$ будут, следовательно, функциями только координат $U_1, \ldots, U_N$, X_R; система (35) является системой N дифференциальных уравнений с N неизвестными и одной независимой переменной. Следовательно, она вполне интегрируема, ч. т. д.

Важное замечание. Многообразие $R—N$ измерений, которое удовлетворяет системе (35), регулярно в окрестности всякой точки, где формы $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$ линейно независимы относительно дифференциалов. Такое многообразие не может само себя пересекать. Но, если рассматривать его в целом, оно может проходить бесконечное число раз в окрестности одной и той же точки.

Первое следствие теоремы Фробениуса. Рассмотрим компоненты ω_s перемещения репера группы. Система с r уравнениями и $2r$ переменными

$$\omega_s(\xi, d\xi) = \omega_s(\xi', d\xi') \tag{36}$$

вполне интегрируема. Но мы можем написать:

$$\omega'_s(\xi, d\xi, \delta\xi) = \sum_{p,q} c_{pqs}(\xi)\, \omega_p(\xi, d\xi)\, \omega_q(\xi, \delta\xi)\ [c_{pqs}(\xi) + c_{qps}(\xi) = 0].$$

В силу теоремы Фробениуса, соотношения

$$\sum_{p,q} c_{pqs}(\xi)\, \omega_p(\xi, d\xi)\, \omega_q(\xi, \delta\xi) = \sum_{p,q} c_{pqs}(\xi')\, \omega_p(\xi'\, d\xi')\, \omega_q(\xi'\delta\xi')$$

должны иметь место каждый раз, когда $d\xi$, $d\xi'$, $\delta\xi$, $\delta\xi'$ удовлетворяют уравнениям (36). Следовательно,

$$c_{pqs}(\xi) = c_{pqs}(\xi') = \mathrm{const}.$$

Это было основным результатом п. **157**.

Второе следствие теоремы Фробениуса. Теорема п. **162** утверждает, что система (29) с r уравнениями и $r+\rho$ переменными вполне интегрируема. Доказать это — значит, в силу теоремы Фробениуса, проверить, что всякий раз, когда дифференциалы удовлетворяют соотношениям (29), имеем:

$$\omega'_s = \omega^{*\prime}_s.$$

Но этот факт немедленно вытекает из уравнений структуры

$$\omega'_s = \sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p\omega_q], \quad \omega^{*\prime}_s = \sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega^*_p\omega^*_q].$$

Третье следствие теоремы Фробениуса. Мы уже говорили (п. **155**, стр. 277), что для того, чтобы форма $\omega(x, dx)$, зависящая от n переменных, была полным точным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы ее внешняя производная была тождественно равна нулю. Этот факт можно вывести из теоремы Фробениуса: чтобы форма $\omega(x, dx)$ была полным точным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы уравнение с $n+1$ независимыми переменными

$$dy - \omega(x, dx) = 0$$

было вполне интегрируемо; но условие Фробениуса сводится в этом случае к равенству $\omega' = 0$.

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП И ПОДГРУПП

Уравнения структуры играют основную роль в определении групп, которые обладают заданными свойствами. Мы покажем наиболее простые из этих проблем.

167. Отыскание всех однопараметрических групп. Переносы по прямой образуют однопараметрическую группу. Ее группа параметров имеет уравнение

$$\xi' = \xi + a.$$

Она оставляет инвариантной форму $\omega_1 = d\xi$; ее уравнение структуры будет иметь вид:

$$\omega'_1 = 0. \tag{37}$$

Но уравнение структуры однопараметрической группы необходимо сводится к уравнению (37). В силу условия изоморфизма (п. **164**, стр. 288), всякая однопараметрическая группа изоморфна группе переносов по прямой. Так, например, этой группе изоморфна группа вращений круга: $\varphi'=\varphi+a$, где угол φ определяется с точностью до $2k\pi$; но изоморфизм здесь мериэдрический, так как пространство параметров, которое совпадает с окружностью, не просто связно.

168. Отыскание всех двупараметрических групп. Параллельный перенос на плоскости образует двупараметрическую группу. Ее группа параметров имеет уравнения

$$\xi_1' = \xi_1 + a_1, \quad \xi_2' = \xi_2 + a_2. \tag{38}$$

Она оставляет инвариантными формы $\omega_1=d\xi_1$, $\omega_2=d\xi_2$; ее уравнения структуры будут иметь вид:

$$\omega_1' = 0, \quad \omega_2' = 0. \tag{39}$$

Группа линейных подстановок $x'=ax+b$ также зависит от двух параметров. Ее уравнения структуры имеют вид (п. **158**, стр. 280):

$$\omega_1' = 0, \quad \omega_2' = -[\omega_1\omega_2]. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь произвольную двупараметрическую группу. Ее уравнения структуры будут иметь вид:

$$\omega_1' = c_{121}[\omega_1\omega_2], \quad \omega_2' = c_{122}[\omega_1\omega_2]. \tag{41}$$

Линейная подстановка с постоянными коэффициентами, выполненная над ω_1 и ω_2, позволит обратить в нуль c_{121} и дать c_{122} одно из значений 0 или -1. Следовательно, двупараметрическая группа имеет структуру (39) или структуру (40). Поэтому всякая двупараметрическая группа изоморфна группе параллельных переносов на плоскости или группе линейных подставок с одним переменным.

169. Представление абстрактной группы. Определение подгрупп группы. Глава IX привела разыскание транзитивных групп, изоморфных данной группе (п. **116**, стр. 231), и определение подгрупп данной группы (п. **125**, стр. 240), к следующей задаче: *построить линейные комбинации с постоянными коэффициентами из компонент* $\omega_1, \ldots, \omega_r$, *приравнивание нулю которых образует вполне интегрируемую систему.*

Теорема Фробениуса и уравнения структуры немедленно дают необходимое и достаточное условие того, чтобы система

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_\rho = 0$$

была вполне интегрируема: для этого должны выполняться равенства

$$c_{pqs} = 0 \text{ для } s = 1, \ldots, \rho;\ p = s + 1, \ldots, r;\ q = s + 1, \ldots, r. \qquad (42)$$

Поскольку постоянные структуры известны, задача, содержание которой только что напоминалось, сводится, следовательно, к простой алгебраической задаче.

Вообще в главе IX (п. **119**, стр. 236) отыскание транзитивных или интранзитивных групп, изоморфных данной группе, сведено к следующей задаче: *найти такие функции* α_{ij} *переменных* $y_1, \ldots, y_p$, *чтобы система*

$$dy_1 = 0, \ldots, dy_p = 0, \qquad (43)$$

$$\sum_{1 \leqslant s \leqslant r} \alpha_{is}(y)\, \omega_s(\xi, d\xi) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n - p) \qquad (44)$$

была вполне интегрируема. Теорема Фробениуса и уравнения структуры позволяют дать этому условию следующую форму: для этого, если формы ω_s удовлетворяют уравнениям (44), должны выполняться следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}(y) \sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p \omega_q] = 0. \qquad (45)$$

Определение функций $\alpha_{is}(y)$ будет, следовательно, просто алгебраической задачей.

Глава XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (продолжение)

I. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

170. Введение. Пусть дана конечная и непрерывная группа G, которая транзитивно оперирует над точками области D. Задачи дифференциальной геометрии, которые касаются проведенных в области D многообразий, изучаемых относительно преобразований группы G, рассматриваются методом подвижного репера; этот метод был описан в разделе I главы X (стр. 241—248).

Эти геометрические задачи останутся теми же самыми, если группу G заменить подобной группой. Чтобы их разрешить, нет надобности, следовательно, предполагать группу G и область D явно заданными. Достаточно уточнить, какую абстрактную группу представляет группа G и какое тело объектов реализуют точки области D. Чтобы охарактеризовать эту абстрактную группу, достаточно задать постоянные структуры группы G (по крайней мере, если пространство параметров группы G просто связно; ср. *Условие изоморфизма*, п. **164**, стр. 288). Чтобы охарактеризовать это тело объектов, достаточно уточнить, например, что оно образует интегральные многообразия системы, получаемой обращением в нуль n первых относительных компонент ω_s перемещения репера группы G (это предполагает, что точки группы G будут ориентированными объектами).

В итоге (с точностью до некоторых вопросов ориентации) данными геометрических задач, которые решаются методом

подвижного репера, будут постоянные структуры «фундаментальной группы G». В этой главе мы ставим себе задачей показать, как можно приложить этот метод, используя только постоянные структуры. Процесс, который мы будем описывать, имеет не только теоретический интерес, он с *помощью быстрого и практического механизма* позволяет указать число инвариантов порядка p и их свойства.

Этот процесс не уточняет вопросов ориентации. Он не может служить для практического определения реперов и инвариантов порядка p заданного многообразия в заданной точке*; но в результате этого процесса легко получить *приведенные уравнения*** многообразия. Из этих уравнений легко получить геометрические интерпретации; с помощью прямого подсчета, не зависящего от метода подвижного репера, отсюда можно получить ответы на вопросы ориентации, которые остались нерешенными (см. п. 42, стр. 133).

171. Напоминание обозначений (п. 127, стр. 242); **приложение уравнений структуры Э. Картана.** Рассмотрим многообразие V_λ λ измерений; остановимся на одном из его ориентированных элементов касания порядка p. Этот элемент касания определен семейством реперов, зависящих от ν_p параметров (*реперы порядка* p) и системой инвариантов $k_1, \ldots, k_{\mu_p}$ (*инварианты порядков* $\leqslant p$).

Преобразования этих реперов друг в друга образуют подгруппу $\mathcal{G}_p$ группы G; мы будем называть ее *подгруппой порядка* p, присоединенной к рассматриваемому элементу касания.

Рассмотрим репер, который меняется, оставаясь все время репером порядка p одной и той же точки многообразия V_λ Между его относительными компонентами ω_i существует $r-\nu_p$ линейно независимых соотношений, получаемых обращением в нуль $r-\nu_p$ *главных компонент порядков* $\leqslant p$:

$$\pi_1 = \sum_{p=1}^{r} a_{1,p}\omega_p, \ \ldots, \ \pi_{r-\nu} = \sum_{p=1}^{r} a_{r-\nu_p,p}\omega_p; \tag{1}$$

коэффициенты $a_{t,p}$ — постоянные величины или функции инвариантов порядков $\leqslant p$.

---

* Мы занимались такими определениями с помощью метода подвижного репера в п. 138 (стр. 252—255).

** Мы дали примеры приведенных уравнений в п. 39 [уравнения (26), стр. 130] и в п. 139 [уравнения (17), стр. 257]. Вообще приведенными уравнениями называются уравнения многообразия, отнесенного к его реперам порядка p.

Для упрощения изложения мы можем предположить, что формы $\omega_{r-\nu_p+1}, \ldots, \omega_r$ будут независимыми линейными комбинациями дифференциалов ν_p *вторичных параметров*, от которых зависят реперы порядка p; это все равно, что сказать, что формы $\pi_1, \ldots, \pi_{r-\nu_p}$ будут линейно независимыми относительно $\omega_1, \ldots, \omega_{r-\nu_p}$.

В силу теоремы п. **124** (стр. 240), система

$$\pi_1 = 0, \ldots, \pi_{r-\nu_p} = 0$$

вполне интегрируема при любой системе постоянных значений, придаваемых главным параметрам в выражениях $a_{t,p}$. Теорема Фробениуса (п. **166**, стр. 289) утверждает, что при этих условиях величины

$$\sum_{p=1}^{r} a_{1,p}\omega'_p, \ldots, \sum_{p=1}^{r} a_{r-\nu_p,p}\omega'_p$$

обращаются в нуль всякий раз, когда дифференциалы обращают в нуль $\pi_1, \ldots, \pi_{r-\nu_p}$. Но дифференциалы функций $a_{t,p}$ обращаются в нуль вместе с дифференциалами dk_m инвариантов. Это доказывает, что можно написать:

$$\pi'_i = \sum_{(\alpha,\beta)} C_{\alpha\beta i}[\pi_\alpha\pi_\beta] + \sum_{m,\alpha} D_{m\alpha i}[dk_m\pi_\alpha] +$$
$$+ \sum_{\alpha,n} A_{\alpha n i}[\pi_\alpha\omega_{r-\nu_p+n}] + \sum_{m,n} B_{mni}[dk_m\omega_{r-\nu_p+n}], \qquad (2)$$

где индексы суммирования α, β пробегают значения от 1 до $r-\nu_p$, индекс m — от 1 до μ_p, индекс n — от 1 до ν_p. Коэффициенты являются функциями инвариантов k_m, которые немедленно получаются из величин $a_{t,p}$ и *постоянных структуры* c_{pqs} *фундаментальной группы* G.

Приступим к специальному выбору дифференциалов d и δ, которые встречаются в формулах (2). Дифференциалы d главных и вторичных параметров будут неопределенными, дифференциалы δ главных параметров будут равны нулю; дифференциалы δ вторичных параметров будут ν_p новыми переменными, образующими ν_p бесконечно малых приращений; дифференциалы $d\delta$ и δd главных и вторичных параметров будут равны нулю. Символы d и δ переместительны. Величины $\tilde{\omega}_i(\delta)$ равны нулю, и мы положим:

$$\omega_s(\delta) = e_s \qquad (s = r - \nu_p + 1, \ldots, r).$$

Следовательно, уравнения (2) запишутся в виде:

$$\delta\pi_i + \sum_{n=1}^{n=\nu_p} e_{r-\nu_p+n} \left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r-\nu_p} A_{\alpha n i}\pi_\alpha + \sum_{m=1}^{m=\mu_p} B_{mni}\, dk_m \right] = 0 \qquad (3)$$

$$(i = 1, \ldots, r - \nu_p).$$

Эти формулы показывают, какие приращения получают формы $\pi_1, \ldots, \pi_{r-\nu_p}$, когда вторичные параметры получают данные приращения: они дают инфинитезимальные преобразования группы $\mathcal{G}_p$, которая рассматривается как оперирующая над главными компонентами порядков $\leqslant p$.

Напомним определение *коэффициентов порядка* p: $b_{\alpha\beta}$ *и* $b'_{\alpha\beta}$. Когда репер изменяется, постоянно оставаясь репером порядка p многообразия V_λ, имеем:

$$\left.\begin{aligned} dk_\alpha &= b_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + b_{\alpha\lambda}\pi_\lambda, \quad \text{где} \quad \mu_{p-1} < \alpha \leqslant \mu_p, \\ \pi_\alpha &= b'_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + b'_{\alpha\lambda}\pi_\lambda, \quad \text{где} \quad r - \nu_{p-1} < \alpha \leqslant r - \nu_p \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Когда вторичные параметры получают приращения, коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ и $b'_{\alpha\beta}$ получают приращения $\delta b_{\alpha\beta}$ и $\delta b'_{\alpha\beta}$, которые получаются при дифференцировании формул (4); dk_α остается постоянным ($\delta\, dk_\alpha = 0$); отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \delta b_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + \delta b_{\alpha\lambda}\pi_\lambda + b_{\alpha 1}\delta\pi_1 + \ldots + b_{\alpha\lambda}\delta\pi_\lambda, \\ \delta\pi_\alpha &= \delta b'_{\alpha 1}\pi_1 + \ldots + \delta b'_{\alpha\lambda}\pi_\lambda + b'_{\alpha 1}\delta\pi_1 + \ldots + b'_{\alpha\lambda}\delta\pi_\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Заменим в формулах (3) главные компоненты π_l порядка p их выражениями (4) и главные компоненты π_l порядков $< p$ их выражениями в виде функций от $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядков $\leqslant p$. Внесем таким образом подсчитанные значения $\delta\pi_1, \ldots, \delta\pi_{r-\nu_p}$ в уравнения (5); запишем, что в каждом таким образом полученном соотношении коэффициенты при $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ равны нулю; тогда получатся соотношения вида:

$$\left.\begin{aligned} \delta b_{\alpha\beta} &= \sum_{n=1}^{n=\nu_p} f_{\alpha\beta n}(b_{\lambda\mu}, b'_{\lambda\mu})\, e_{r-\nu_p+n}, \\ \delta b'_{\alpha\beta} &= \sum_{n=1}^{n=\nu_p} \varphi_{\alpha\beta n}(b_{\lambda\mu}, b'_{\lambda\mu})\, e_{r-\nu_p+n}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Эти формулы (6) дают инфинитезимальные преобразования группы $\mathcal{G}_p$, которая рассматривается как оперирующая над коэффициентами порядка p.

172. Механизм метода подвижного репера. Прилагать этот метод — значит некоторое число раз разрешать следующую проблему.

Пусть даны постоянные структуры фундаментальной группы G. Нам известны: 1° число инвариантов порядков $\leqslant p$; 2° матрица вторичных компонент порядков $\leqslant p$; 3° выражения главных компонент порядков $< p$ репера порядка p многообразия V_λ и дифференциалы инвариантов порядков $< p$ в виде функций от $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядков $\leqslant p$.

Найдем аналогичные сведения относительно порядка $p+1$. С этой целью выберем из матрицы вторичных коэффициентов порядков p и $p-1$ систему $\nu_{p-1} - \nu_p$ главных компонент порядка p (1). Подсчитаем их внешние производные (2). Определим по формулам (4) коэффициенты порядка p и подсчитаем, с помощью (5), инфинитезимальные преобразования (6) группы $\mathcal{G}_p$, которая рассматривается как оперирующая над этими коэффициентами. Рассмотрим пространство W_p, имеющее координатами коэффициенты порядка p. Мы построим, следуя указаниям п. **87** (стр. 190), множество $v(b)$ образов произвольно выбранной в W_p точки b при всевозможных операциях группы $\mathcal{G}_p$. Проведем в области W_p, как можно более простым способом, многообразие* w_p, которое пересекает каждое многообразие $v(b)$ в одной и только одной точке. Всякая точка b пространства W_p имеет, следовательно, одну и только одну соответствующую точку на w_p. Согласно предписаниям п. **129**, в качестве *реперов порядка* $p+1$, мы выберем реперы порядка p, которым соответствует точка b, принадлежащая w_p; в качестве *инвариантов порядка* $p+1$ мы выберем параметры, которые позволяют характеризовать положение этой точки b на w_p.

Если, например $\mathcal{G}_p$ действует транзитивно на W_p, то w_p будет точкой, и инвариантов порядка $p+1$ нет.

Формулы (4), когда точка b лежит на w_p, дают *выражения* главных компонент порядка p и дифференциалов инвариантов порядка p в виде функций от $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$ и инвариантов порядка $p+1$.

Группа $\mathcal{G}_{p+1}$ — подгруппа группы $\mathcal{G}_p$, которая оставляет неподвижной точку w_p, соответствующую рассматриваемому элементу касания порядка $p+1$. *Матрица вторичных компо-*

---

* Если необходимо, w_p составляется из нескольких многообразий.

нент порядка $p+1$ сводится к матрице вторичных компонент порядка p, которая получится, если связать величины e_q соотношениями (6), где надо положить $\delta b_{\alpha\beta}=0$, $\delta b'_{\alpha\beta}=0$.

Важное замечание. Когда $\lambda>1$, важно выразить, что главные компоненты порядков 0, 1,... удовлетворяют уравнениям структуры фундаментальной группы G. Если пренебречь этим, то будут рассмотрены несуществующие многообразия (см. в качестве примеров пп. **187**, **188** и **192**, стр. 317, 318 и 323).

II. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

173. Введение. Мы задались проблемой, первое решение которой сформулировано в п. **141** (стр. 259); это первое решение приводит к длинным выкладкам (стр. 259—267). Приложение метода, изложенного в предыдущем пункте, не только более удобно приводит к цели, но и открывает важное свойство проективной геометрии: существование ангармонического отношения четырех точек кривой (см. п. **183**, стр. 309). Это приложение мы сейчас и будем излагать.

Напомним уравнения структуры рассматриваемой группы, которая является проективной группой плоскости [уравнения (20), стр. 281]:

$$\omega'_{ij}=\sum_{k=0}^{2}[\omega_{ik}\omega_{kj}] \qquad (i,\ j=0,1,2). \tag{7}$$

174. Природа элементов нулевого порядка. Реперами нулевого порядка, присоединенными к точке $\mathbf{A}$, будут реперы $\mathbf{AA}_1\mathbf{A}_2$, имеющие эту точку своей первой вершиной. Геометрически устанавливается, что матрицей вторичных компонент нулевого порядка будет матрица

$$\begin{pmatrix} e_{00} & e_{01}=0 & e_{02}=0 \\ e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{20} & e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } e_{00}+e_{11}+e_{22}=0.$$

Следовательно, главные компоненты нулевого порядка будут линейными комбинациями форм ω_{01} и ω_{02}.

Инвариантов нулевого порядка нет. Коэффициент нулевого порядка $b=\dfrac{\omega_{02}}{\omega_{01}}$ произволен.

175. Природа элементов первого порядка. Внешние производные главных компонент ω_{01} и ω_{02}, в силу уравнений структуры (7), будут иметь вид:

$$\omega'_{01} = -[\omega_{01}\omega_{00}] + [\omega_{01}\omega_{11}] + [\omega_{02}\omega_{21}],$$

$$\omega'_{02} = -[\omega_{02}\omega_{00}] + [\omega_{01}\omega_{12}] + [\omega_{02}\omega_{22}].$$

Следовательно, главные компоненты группы $\mathcal{G}_0$ испытывают инфинитезимальные преобразования [см. (3)]:

$$\delta\omega_{01} = \omega_{01}(e_{00} - e_{11}) - \omega_{02}e_{21},$$
$$\delta\omega_{02} = -\omega_{01}e_{12} \qquad + \omega_{02}(e_{00} - e_{22}).$$

Коэффициент нулевого порядка b, следовательно, подвергается инфинитезимальному преобразованию *

$$\delta b = e_{21}b^2 - (e_{22} - e_{11})\, b - e_{12};$$

группа $\mathcal{G}_0$ оперирует транзитивно над b; инвариантов первого порядка нет.

Реперы первого порядка определим с помощью соотношения $b=0$, которое влечет $\omega_{02}=0$.

Заменяя δb и b нулями в уравнении, определяющем δb, мы получим $e_{12}=0$. Следовательно, матрица вторичных компонент первого порядка будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} e_{00} & 0 & 0 \\ e_{10} & e_{11} & 0 \\ e_{20} & e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } e_{00} + e_{11} + e_{22} = 0.$$

Главными компонентами реперов первого порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1
ω_{01}, $\omega_{02}\,(=0)$	ω_{12}

176. Природа элементов второго порядка. В силу уравнений структуры (7), имеем:

$$\omega'_{12} = -[\omega_{02}\omega_{10}] - [\omega_{12}\omega_{11}] + [\omega_{12}\omega_{22}];$$

---

* Выражение этого инфинитезимального преобразования доказывает, что $\mathcal{G}_0$ подвергает b наиболее общему гомографическому преобразованию.

группа $\mathcal{G}_1$, следовательно, подвергает форму ω_{12} инфинитезимальному преобразованию [см. (3)]:

$$\delta\omega_{12} = \omega_{12}(e_{11} - e_{22}).$$

Предыдущее выражение $\delta\omega_{01}$ приводится к виду:

$$\delta\omega_{01} = \omega_{01}(e_{00} - e_{11}).$$

Мы имеем коэффициент первого порядка $b = \frac{\omega_{12}}{\omega_{01}}$, причем

$$\delta b = b(2e_{11} - e_{22} - e_{00}).$$

Группа $\mathcal{G}_1$ оперирует транзитивно * над b; инвариантов второго порядка нет.

Реперы второго порядка мы определим с помощью соотношения ** $b=1$, которое влечет

$$\omega_{12} = \omega_{01}.$$

Заменяя δb нулем и b единицей в уравнении, определяющем δb, получим:

$$2e_{11} - e_{22} - e_{00} = 0;$$

но

$$e_{00} + e_{11} + e_{22} = 0.$$

Следовательно,

$$e_{11} = 0, \qquad e_{22} = -e_{00}$$

Матрица компонент второго порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} e_{00} & 0 & 0 \\ e_{10} & 0 & 0 \\ e_{20} & e_{21} & -e_{00} \end{pmatrix}.$$

---

* Выражение δb доказывает, что $\mathcal{G}_1$ умножает b на произвольную постоянную.

** Указанные рассуждения правильны, если переменные являются комплексными. Если же переменные действительны, надо рассуждать следующим образом: группа $\mathcal{G}_1$ транзитивно оперирует над точками $b<0$ и над точками $b>0$; следовательно, операции группы $\mathcal{G}_1$ позволяют придать b одно из значений ± 1. С другой стороны, преобразование точки A_1 в $-A_1$ и точки A_2 в $-A_2$ приводит случай $b=-1$ к случаю $b=1$. Отсюда окончательно получаем, что $b=1$.

Следовательно, главными компонентами порядков $\leqslant 2$ реперов второго порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2
$\omega_{01},\ \omega_{02}\,(=0)$	$\omega_{12}\,(=\omega_{01})$	ω_{11}

Замечание. Если b имеет исключительное значение 0, рассуждения теряют силу; эту исключительную категорию кривых, для которых b тождественно равно нулю, образуют прямые.

177. Природа элементов третьего порядка. В силу уравнений структуры (7), имеем

$$\omega'_{11} = -[\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{12}\omega_{21}] = -[\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{01}\omega_{21}];$$

следовательно, группа $\mathcal{G}_2$ подвергает форму ω_{11} инфинитезимальному преобразованию

$$\delta\omega_{11} = \omega_{01}(e_{10} - e_{21}).$$

В силу предыдущего выражения $\delta\omega_{01}$ имеем

$$\delta\omega_{01} = \omega_{01}e_{00}.$$

Мы имеем коэффициент второго порядка $b = \frac{\omega_{11}}{\omega_{01}}$, причем

$$\delta b = e_{10} - e_{21} - be_{00}.$$

Группа $\mathcal{G}_2$ транзитивно* оперирует над b; инвариантов третьего порядка нет. Реперы третьего порядка мы определим с помощью соотношения $b=0$, которое дает

$$\omega_{11} = 0.$$

Заменяя в уравнении, определяющем δb, величины δb и b нулями, мы получим $e_{10}=e_{21}$.

Следовательно, матрица вторичных компонент третьего порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} e_{00} & 0 & 0 \\ e_{10} & 0 & 0 \\ e_{20} & e_{10} & -e_{00} \end{pmatrix}.$$

---

* Группа $\mathcal{G}'_2$ преобразует b с помощью наиболее общей линейной подстановки.

Главными компонентами реперов третьего порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3
$\omega_{01},\ \omega_{02}\ (=0)$	$\omega_{12}\ (=\omega_{01})$	$\omega_{11}\ (=0)$	$\omega_{21}-\omega_{10}$

178. Природа элементов четвертого порядка. Уравнения структуры (7) дают:

$$\omega'_{21} = -[\omega_{01}\omega_{20}] - [\omega_{11}\omega_{21}] - [\omega_{21}\omega_{22}] = -[\omega_{01}\omega_{20}] + [\omega_{21}\omega_{00}],$$

$$\omega'_{10} = \quad [\omega_{10}\omega_{00}] + [\omega_{11}\omega_{10}] + [\omega_{12}\omega_{20}] = [\omega_{10}\omega_{00}] + [\omega_{01}\omega_{20}],$$

откуда

$$\omega'_{21} - \omega'_{10} = -2[\omega_{01}\omega_{20}] + [\omega_{21}-\omega_{10},\ \omega_{00}].$$

Следовательно, группа $\mathfrak{G}_3$ подвергает форму $\omega_{21}-\omega_{10}$ инфинитезимальному преобразованию

$$\delta(\omega_{21}-\omega_{10}) = 2\omega_{01}e_{20} - (\omega_{21}-\omega_{10})\,e_{00}.$$

С другой стороны,

$$\delta\omega_{01} = \omega_{01}e_{00}.$$

Имеем коэффициент третьего порядка $b = \dfrac{\omega_{21}-\omega_{10}}{\omega_{01}}$, причем

$$\delta b = 2e_{20} - 2e_{00}b.$$

Группа $\mathfrak{G}_3$ оперирует транзитивно* над b; инварианта четвертого порядка нет.

Определим реперы четвертого порядка с помощью соотношения $b=0$, которое влечет $\omega_{21}=\omega_{10}$. Полагая $\delta b = b = 0$, мы получим $e_{20}=0$. Матрица вторичных компонент четвертого порядка будет, следовательно, иметь вид:

$$\begin{pmatrix} e_{00} & 0 & 0 \\ e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & e_{10} & -e_{00} \end{pmatrix}.$$

Главными компонентами реперов четвертого порядка будут формы

* Группа $\mathfrak{G}_3$ подвергает b наиболее общей линейной подстановке.

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3	Порядок 4
$\omega_{01},\ \omega_{02} (= 0)$	$\omega_{12} (= \omega_{01})$	$\omega_{11} (= 0)$	$\omega_{21} - \omega_{10} (= 0)$	ω_{20}

179. Природа элементов пятого порядка. Уравнения структуры (7) нам дают

$$\omega'_{20} = [\omega_{20}\omega_{00}] + [\omega_{21}\omega_{10}] - [\omega_{20}\omega_{22}] = 2[\omega_{20}\omega_{00}].$$

Следовательно, группа $\mathcal{G}_4$ подвергает форму ω_{20} инфинитезимальному преобразованию

$$\delta\omega_{20} = -2\omega_{20}e_{00}.$$

С другой стороны,

$$\delta\omega_{01} = \omega_{01}e_{00}.$$

Мы имеем коэффициент четвертого порядка $b = \frac{\omega_{20}}{\omega_{01}}$, причем

$$\delta b = -3e_{00}b.$$

Группа $\mathcal{G}_4$ оперирует транзитивно * над b; инвариантов пятого порядка нет.

Реперы пятого порядка определим с помощью соотношения ** $b = -1$, которое влечет $\omega_{20} = -\omega_{01}$. Полагая $\delta b = 0$, $b = -1$, мы получаем $e_{00} = 0$. Матрица вторичных компонент пятого порядка имеет, следовательно, вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_{10} & 0 & 0 \\ 0 & e_{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Главными компонентами реперов пятого порядка будут формы

* Группа $\mathcal{G}_4$ умножает b на произвольную постоянную.

** Приведенные рассуждения правильны над полем комплексных чисел. В поле действительных чисел группа $\mathcal{G}_4$ позволяет придать b одно из значений ± 1. Замена A_0 на $-A_0$ и A_2 на $-A_2$ позволяет привести случай $b = -1$ к случаю $b = 1$, не изменяя значений, данных коэффициентам порядков < 4, т. е. не изменяя соотношений $\omega_{02} = 0$, $\omega_{11} = 0$, $\omega_{12} = \omega_{01}$, $\omega_{21} - \omega_{10} = 0$.

Порядок 0	Порядок 1	Порядок 2	Порядок 3	Порядок 4	Порядок 5
$\omega_{01}, \omega_{02} (=0)$	$\omega_{12} (=\omega_{01})$	$\omega_{11} (=0)$	$\omega_{21}-\omega_{10}(=0)$	$\omega_{20} (=-\omega_{01})$	ω_{00}

Замечание. Если b имеет исключительное значение 0, то рассуждения теряют силу; кривые, для которых b равно нулю, т. е. все реперы четвертого порядка которых удовлетворяют уравнению $\omega_{20}=0$, образуют исключительную категорию, которую мы изучим в п. 182.

180. Природа элементов шестого порядка. Уравнения структуры (7) дают нам

$$\omega'_{00} = [\omega_{01}\omega_{10}] + [\omega_{02}\omega_{20}] = [\omega_{01}\omega_{10}].$$

Следовательно, группа $\mathcal{G}_5$ подвергает форму ω_{00} инфинитезимальному преобразованию

$$\delta\omega_{00} = -\omega_{01}e_{10}.$$

С другой стороны, в силу предыдущего выражения $\delta\omega_{01}$, мы имеем

$$\delta\omega_{01} = 0;$$

следовательно, форма ω_{01} будет *инвариантной формой пятого порядка;* мы обозначим ее посредством $d\sigma$ и будем называть σ *проективной дугой.*

Мы имеем коэффициент пятого порядка $b = \dfrac{\omega_{00}}{\omega_{01}}$, причем группа $\mathcal{G}_5$ оперирует транзитивно * над b; инвариантов шестого порядка нет. Определим реперы шестого порядка с помощью соотношения $b=0$, которое влечет

$$\omega_{00} = 0.$$

Уравнение $\delta b=0$ дает $e_{10}=0$; все вторичные компоненты шестого порядка равны нулю; репер шестого порядка точки не зависит ни от каких параметров; это — *репер Френе.*

181. Природа элементов порядка >6. Реперы порядков >6 совпадают с реперами Френе.

Существует инвариант седьмого порядка $k = -\dfrac{\omega_{10}}{d\sigma}$.

Существует инвариант порядка p для $p > 7$; он равен $\dfrac{d^{p-7}k}{d\sigma^{p-7}}$.

* Группа $\mathcal{G}_5$ преобразует величину b, прибавляя к ней произвольную постоянную.

Матрица относительных компонент репера Френе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\sigma & 0 \\ -k d\sigma & 0 & d\sigma \\ -d\sigma & -k d\sigma & 0 \end{pmatrix};$$

иначе говоря, формулы Френе будут формулами, уже выписанными в п. **149** [(16), стр. 267].

182. Кривые, все элементы касания пятого порядка которых исключительные. Мы хотим привести ряд замечаний, касающихся кривых C, все реперы четвертого порядка которых удовлетворяют соотношению $\omega_{20}=0$ (см. замечание к п. **179**).

Реперами Френе кривых C будут их реперы четвертого порядка, кривые C не имеют никаких инвариантов.

В силу п. **131** (проблема равенства, стр. 246), проективными преобразованиями, которые совмещают две кривые C, будут те преобразования, которые совмещают два каких-нибудь из их реперов Френе.

Репер Френе кривой C зависит от одного главного и двух вторичных параметров. Относительные компоненты образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & 0 \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{01} \\ 0 & \omega_{10} & -\omega_{00} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Проективные преобразования, которые переводят кривую C саму в себя, зависят от трех параметров и оставляют инвариантными элементы этой матрицы, т. е. формы ω_{01}, ω_{00} и ω_{10}. В силу второй основной теоремы *теории групп* (стр. 288), формы ω_{01}, ω_{00} и ω_{10} удовлетворяют уравнениям структуры; эти уравнения выводятся непосредственно из уравнений структуры (7) и матрицы (8); это будут уравнения

$$\omega'_{01} = [\omega_{00}\omega_{01}], \quad \omega'_{00} = [\omega_{01}\omega_{10}], \quad \omega'_{10} = [\omega_{10}\omega_{00}]. \tag{9}$$

Достаточно положить

$$\omega_{01} = 2\omega_1, \quad \omega_{00} = -\omega_2, \quad \omega_{10} = -\omega_3,$$

чтобы преобразовать уравнения структуры (9) в уравнения (28) п. **161** (стр. 283), которые являются уравнениями струк-

туры группы гомографических подстановок. В силу *условия изоморфизма* (п. **164**, стр. 288), группа проективных преобразований, которые переводят кривую C саму в себя, следовательно, изоморфна группе гомографических подстановок. Можно уточнить: многообразиями, на которых $\omega_1=0$ будут те многообразия, параметр которых гомографически преобразуется группой, оставляющей инвариантными формы ω_1, ω_2, ω_3. Следовательно, группа проективных преобразований, которые преобразуют кривую C саму в себя, подобна гомографической группе, если считать, что она оперирует на многообразиях $\omega_{01}=0$. Но обратить в нуль форму ω_{01} — это значит сохранить постоянным главный параметр, от которого зависит рассматриваемый репер Френе. Многообразия $\omega_{01}=0$ образуют, следовательно, класс объектов, эквивалентных классу точек кривой C.

Значит, проективные преобразования, которые переводят кривую C саму в себя, гомографически преобразуют точки кривой C, или, лучше, они гомографически преобразуют параметр, от которого зависят эти точки, если этот параметр надлежащим образом выбран.

Пусть $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ — наиболее общий репер Френе кривой C. Рассмотрим неподвижную точку, представленную аналитической точкой

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \lambda\mathbf{A}_1 + \mu\mathbf{A}_2.$$

Пользуясь матрицей (8), мы получим:

$$d\mathbf{P} = (\omega_{00} + \lambda\omega_{10})\,\mathbf{A} + (d\lambda + \omega_{01} + \mu\omega_{10})\,\mathbf{A}_1 + $$
$$+ (d\mu + \lambda\omega_{01} - \mu\omega_{00})\,\mathbf{A}_2;$$

точка P геометрически фиксирована, если правая часть будет кратна аналитической точке $\mathbf{P}$. Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} &d\lambda + \omega_{01} - \lambda\omega_{00} + (\mu - \lambda^2)\,\omega_{10} = 0,\\ &d\mu + \lambda\omega_{01} - 2\mu\omega_{00} - \lambda\mu\omega_{10} \qquad = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Зная неоднородные координаты λ, μ точки $\mathbf{P}$ относительно частного репера Френе, ее координаты относительно наиболее общего репера Френе получим, интегрируя уравнения (10); эти уравнения образуют, следовательно, вполне интег-

рируемую систему; впрочем, это утверждение легко доказать с помощью теоремы Фробениуса (стр. 289).

Определим все кривые, которые обладают одним и тем же уравнением $\mu=f(\lambda)$ относительно всех реперов Френе кривой C. В силу (10), мы будем иметь:

$$\frac{d\mu}{d\lambda}=\frac{\lambda}{1}=\frac{2\mu}{\lambda}=\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu},$$

что дает единственное решение, а именно

$$\mu=\frac{1}{2}\lambda^2. \tag{11}$$

Кривая C, очевидно обладающая рассматриваемым свойством, будет, следовательно, кривой второго порядка, определяемой уравнением (11). Ее реперами четвертого порядка будут такие реперы, относительно которых ее уравнение имеет вид (11).

Выберем λ за параметр точек кривой C. Когда репер меняется, относительный параметр λ неподвижной точки кривой второго порядка удовлетворяет первому уравнению (10):

$$d\lambda+\omega_{01}-\lambda\omega_{00}-\frac{1}{2}\lambda^2\omega_{10}=0; \tag{12}$$

поскольку это уравнение будет уравнением Риккати, параметр λ фиксированной точки P кривой второго порядка относительно репера R будет гомографической функцией параметра Λ той же точки P относительно фиксированного репера R_0. Это означает, что если применить к точке P проективное преобразование, которое переводит репер R_0 в репер R, то точка P должна совпадать с точкой P' линии C, параметр которой относительно репера R_0 равен Λ. Иначе говоря, проективные перемещения, приводящие линию C к совпадению с самой собой, осуществляют такое гомографическое преобразование над параметрами точек линии C, отнесенной к фиксированному реперу, которое переводит λ в Λ.

183. Проективное развертывание кривой на кривую второго порядка *. Рассуждения, которые мы применили к кривым второго порядка C, обобщаются для произвольной линии Γ.

* Более детально это см. в [20], стр. 51—69.

Реперы четвертого порядка $\mathbf{AA_1A_2}$ линии Г зависят также от одного главного и двух вторичных параметров. Матрица компонент этих реперов будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & 0 \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{20} & \omega_{10} & -\omega_{00} \end{pmatrix}.$$

Она отличается от матрицы (8) наличием главной компоненты ω_{20}. Однако из уравнений структуры (7) можно вывести, что формы ω_{01}, ω_{00} и ω_{10} удовлетворяют уравнениям структуры (9). Преобразования, которые оставляют инвариантными эти три формы, образуют трехпараметрическую группу; эта группа гомографически преобразует главный параметр, от которого зависят точки линии Г, если этот параметр надлежащим образом выбран. Если даны четыре точки линии Г, то ангармоническое отношение соответствующих значений этого главного параметра имеет внутреннее значение в проективной геометрии. Мы назовем его *ангармоническим отношением четырех рассматриваемых точек линии* Г. Его определение вводит только элемент касания четвертого порядка.

В этом пункте мы укажем, как это ангармоническое отношение можно определить геометрически и аналитически.

Уравнение (12) еще вполне интегрируемо; это можно, впрочем, проверить, применяя теорему Фробениуса. Дифференцируя внешним образом левую часть этого уравнения и принимая во внимание само уравнение (12), имеем:

$$\omega'_{01} - \lambda\omega'_{00} - \frac{1}{2}\lambda^2\omega'_{10} + \left[\omega_{01} - \lambda\omega_{00} - \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{10},\ \omega_{00} + \lambda\omega_{10}\right] \equiv$$
$$\equiv \omega'_{01} - [\omega_{00}\,\omega_{01}] - \lambda\{\omega'_{00} - [\omega_{01}\omega_{10}]\} - \frac{1}{2}\lambda^2\{\omega'_{10} - [\omega_{10}\omega_{00}]\}.$$

Эта величина равна нулю в силу (9). Заметим теперь, что соприкасающаяся в каждой точке линии Г кривая второго порядка относительно всех реперов четвертого порядка, присоединенных к этой точке, имеет уравнение $\mu = \frac{1}{2}\lambda^2$. Уравнение (12) позволяет, следовательно, установить взаимно однозначное соответствие между точками различных кривых второго порядка, соприкасающихся к линии Г, и это соответствие является гомографией. Мы получим это соответствие, интегрируя равенство (12) и принимая за постоянную интегрирования Λ значение λ, которое соответствует частному

реперу четвертому порядку, присоединенному к некоторой точке A кривой Γ. Пусть

$$\Lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + 1}, \tag{13}$$

где α, β, γ — функции главных и вторичных параметров, от которых зависит репер $\mathbf{AA_1A_2}$. Точка с параметром Λ кривой второго порядка C_0, соприкасающейся с кривой Γ в точке A_0, соответствует тогда точке с параметром λ кривой второго порядка C, соприкасающейся с линией Γ в точке A. Если линия Γ сама будет кривой второго порядка, то эти две точки будут совпадать — соответствие будет тождественным.

После того как это установлено, для заданных четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4 линии Γ естественно рассмотреть на одной из соприкасающихся кривых второго порядка C_0 четыре точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, соответствующие точкам P_1, P_2, P_3, P_4, каждая из которых рассматривается как точка, принадлежащая соприкасающейся к Γ в этой точке кривой второго порядка, и назвать ангармоническим отношением четырех точек P_i ангармоническое отношение четырех точек Q_i кривой C_0; если в качестве соприкасающейся кривой второго порядка взята отличная от C_0 кривая, то получится то же самое ангармоническое отношение.

Аналитически, в силу (13), каждая точка A линии Γ, которая рассматривается как принадлежащая к соприкасающейся в этой точке кривой второго порядка, соответствует значению $\lambda=0$ относительного параметра, соответствующая ей точка C_0 имеет, следовательно, параметр $\Lambda=\beta$.

Поэтому ангармоническое отношение четырех точек кривой равной ангармоническому отношению четырех соответствующих значений функции β. Отсюда следует, в частности, что β — функция одного главного параметра и что можно выбрать β в качестве главного параметра.

Все это можно представить себе более наглядным, геометрическим способом. При переходе от точки $\mathbf{P}=\mathbf{A}+\lambda\mathbf{A}_1+$ $+\frac{1}{2}\lambda^2\mathbf{A}_2$ соприкасающейся в точке A кривой второго порядка к соответствующей точке $\mathbf{P}'$ бесконечно близкой соприкасающейся кривой второго порядка, имеем

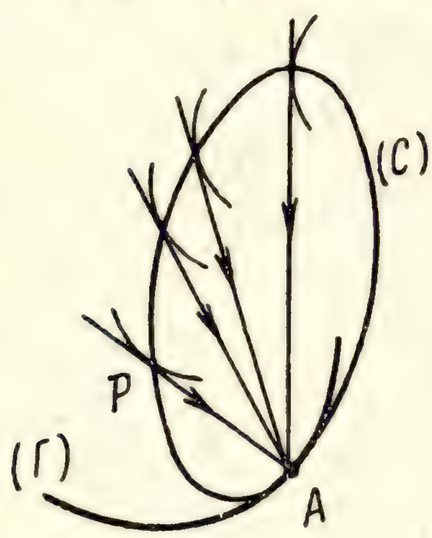
$$d\mathbf{P} = \left(\omega_{00} + \lambda\omega_{10} + \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{20}\right)\mathbf{A} + \left(d\lambda + \omega_{01} + \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{10}\right)\mathbf{A}_1 +$$

$$+ \left(\lambda d\lambda + \lambda\omega_{01} - \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{00}\right)\mathbf{A}_2,$$

откуда, принимая во внимание (12), получим:

$$d\mathbf{P} = (\omega_{00} + \lambda\omega_{10})\,\mathbf{P} + \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{20}\mathbf{A}.$$

Прямая PP' в пределе, проходит через точку A. Точечное соответствие между двумя кривыми второго порядка C и C', следовательно, исключительно простое. Эти две кривые второго порядка имеют общую точку A (они имеют в ней касание третьего порядка). Точке P линии C поставим в соответствие вторую точку пересечения прямой AP с C'. Очевидно, что это соответствие сохраняет ангармоническое отношение. Осуществляя над точкой P последовательно такие операции, получим линию, которую можно назвать *проективной эвольвентой* линии Г и которая обладает тем свойством, что в каждой из ее точек касательная проходит через точку касания с линией Г, соприкасающейся кривой второго порядка, на которой была взята точка P (фиг. 6). Четыре проективные эвольвенты очевидно высекают на различных соприкасающихся кривых второго порядка четверки точек, ангармоническое отношение которых постоянно, это ангармоническое отношение можно назвать ангармоническим отношением четырех эвольвент. Ангармоническое отношение четырех точек линии Г есть не что иное, как ангармоническое отношение четырех эвольвент, которые примыкают к этим точкам.



Фиг. 6

Проективные эвольвенты можно рассматривать как направляющие наложения, или, лучше, развертывания, на линию Г соприкасающейся в некоторой точке A_0 кривой второго порядка C_0, так что каждая точка P кривой второго порядка C_0 следует за проективной эвольвентой, которая идет от этой точки до точки, где она примыкает к линии Г. Кривая второго порядка C_0 последовательно совпадает с различными кривыми второго порядка C, и переход от кривой второго порядка C к бесконечно близкой кривой второго порядка C' есть не что иное, как инфинитезимальное проективное смещение, а именно то смещение, которое относительно одного из реперов четвертого порядка, присоединенных к точке касания кривой C с линией Г, имеет все свои компоненты, кроме ω_{20}, равными нулю; чтобы дать себе отчет в этом результате, достаточно заметить, что, в силу (14), аналитическая точка $\mathbf{P}+d\mathbf{P}$, которую, с точно-

стью до бесконечно малых высшего порядка, можно записать в виде

$$\mathbf{P} + d\mathbf{P} = (1 + \omega_{00} + \lambda\omega_{10})\left(\mathbf{P} + \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{20}\mathbf{A}\right),$$

геометрически совпадает с точкой $\mathbf{P} + \frac{1}{2}\lambda^2\omega_{20}\mathbf{A}$, получающейся из $\mathbf{P}$ с помощью указанного инфинитезимального проективного смещения. Развертывание кривой C_0 на линию Γ получается, следовательно, с помощью бесконечного числа проективных инфинитезимальных смещений. Обратно, можно было бы рассматривать развертывание линии Γ на соприкасающуюся в одной из ее точек A_0 кривую второго порядка: оно получается в результате бесконечного числа проективных инфинитезимальных смещений, каждое из которых имеет в качестве относительных компонент элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемое изгибание Γ совершенно аналогично тому изгибанию, которому подвергают в евклидовой геометрии заданную линию, чтобы развернуть ее на одну из ее касательных: движение изгибания направляется эвольвентами кривой (в обычном смысле) и является результатом бесконечного множества бесконечно малых евклидовых перемещений; две эвольвенты высекают на различных касательных отрезки, длины которых постоянны, так же как четыре проективные эвольвенты высекают на различных соприкасающихся кривых второго порядка четверки точек, ангармонические отношения которых постоянны.

Мы показали, как интегрирование уравнений (12) позволяет аналитически определить ангармоническое отношение четырех точек кривой Γ. Можно было бы поступить иначе и рассматривать зависящее от одного параметра t семейство реперов четвертого порядка, получаемое при интегрировании уравнений

$$\omega_{01} = dt, \quad \omega_{00} = 0, \quad \omega_{10} = 0;$$

после того как это интегрирование выполнено, уравнение в

полных дифференциалах (12) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$d\lambda + dt = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$\Lambda = \lambda + t.$$

Значит, здесь $\beta = t$ и, следовательно, ангармоническое отношение четырех точек линии Г равно ангармоническому отношению четырех значений t. Точкой, описывающей проективную эвольвенту и отвечающей параметру λ, будет точка

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + (\Lambda - t)\,\mathbf{A}_1 + \frac{1}{2}(\Lambda - t)^2\,\mathbf{A}_2.$$

В частности, эвольвента, примыкающая к точке $\mathbf{A}_0 (t=0)$ кривой Г, порождается точкой $\mathbf{P} = \mathbf{A} - t\mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{A}_2$; отсюда легко выводим вид этой эвольвенты в окрестности точки $\mathbf{A}_0$.

Заметим, что здесь $\mathbf{A}_1 = \frac{d\mathbf{A}}{dt}$, $\mathbf{A}_2 = \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$ и что аналитическая точка $\mathbf{A}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{d^3\mathbf{A}}{dt^3} - r\mathbf{A} = 0, \tag{15}$$

если положить $\omega_{20} = r\,dt$. Обратно, всякий раз, когда можно присоединить к каждой точке линии Г аналитическую точку $\mathbf{A}$, удовлетворяющую при надлежаще выбранном параметре t дифференциальному уравнению вида (15), репер $\mathbf{A} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$ будет репером четвертого порядка и ангармоническое отношение четырех точек Г будет равно ангармоническому отношению четырех соответствующих значений t. Выбор параметра t, как мы уже знаем, определяется с точностью до гомографического преобразования с произвольными постоянными коэффициентами, и аналитическая точка $\mathbf{A}$ зависит от этого выбора. Для кривой второго порядка коэффициент r, очевидно, равен нулю.

Отметим, наконец, что с помощью принципа двойственности можно преобразовать геометрическое определение ангармонического отношения точек линии Г. Рассмотрим касательную T к линии C, которая совершает проективное движение; ее характеристическая точка Q постоянно остается на касательной к Г в точке A (фиг. 7). Ангармоническое отношение

четырех точек Г равно ангармоническому отношению четырех таких касательных, которые характеризуются свойством последовательно совпадать с касательными в четырех данных точках линии Г.

184. Замечание. В проективной теории плоских кривых мы пришли к необходимости ввести внутренним образом два параметра, один из которых, проективная дуга, определялся с точностью до аддитивной постоянной, т. е. с точностью до преобразования однопараметрической группы, а другой определялся с точностью до преобразования трехпараметрической группы — группы гомографических подстановок. Можно спросить себя, не существует ли внутреннего параметра, определенного с точностью до преобразования линейной двухпараметрической группы. Такого параметра не существует в проективной геометрии, но он существует в *общей* (не унимодулярной) аффинной геометрии.

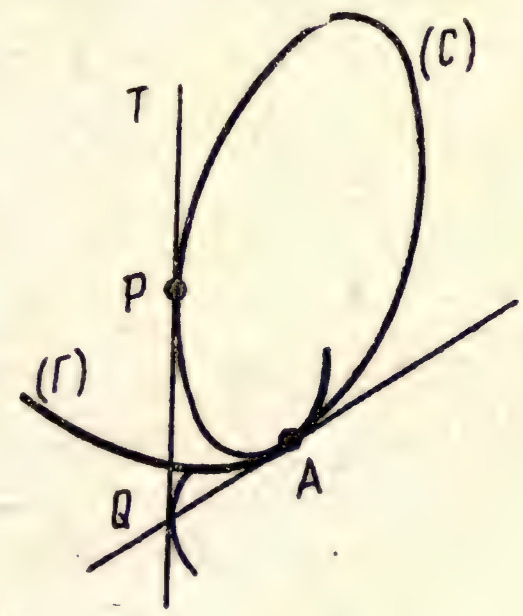


Рис. 7

Выбрав на плоскости единицу площади, устанавливаем существование аффинной дуги; при изменении единицы площади эта дуга подвергается линейной подстановке, она отвечает, следовательно, желаемым условиям. Это единственный внутренний параметр, существующий в общей аффинной геометрии для *парабол,* которые, таким образом, играют в общей аффинной геометрии ту же роль, какую играют кривые второго порядка в проективной геометрии. Для произвольной кривой Г существуют *аффинные эвольвенты*; они получаются, если взять на каждой соприкасающейся к линии Г параболе такую точку P, что касательная в точке P будет параллельна касательной к линии Г в точке, где она касается с рассматриваемой параболой. Три из этих эвольвент высекают на различных соприкасающихся параболах тройки точек, ангармоническое отношение которых с несобственной точкой соответствующей параболы будет постоянным. Доказать эти различные свойства мы предоставляем читателю.

Аналогичный, но гораздо более простой пример имеется в теории кривых *геометрии подобий* (это евклидова геометрия, где равными считаются две подобные фигуры). Классическая криволинейная абсцисса s является параметром, определенным с точностью до линейной подстановки $s \to as+b$. У прямой нет другого внутреннего параметра; но на кривой, в соб-

ственном смысле этого слова, внутренний параметр $\int \rho ds$ (угол смежности) определен с точностью до постоянной.

III. ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

185. Фундаментальная группа G есть группа перемещений, уравнения структуры которой (стр. 281—282) имеют вид:

$$\omega'_i = \sum_{k=1}^{3} [\omega_k \omega_{ki}], \quad \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} [\omega_{ik} \omega_{kj}]$$
$$(\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0). \tag{16}$$

Упростим немного общий метод, который был использован при изучении проективных свойств плоских кривых. Будем исходить из следующей леммы:

Если заданы $2n$ линейных дифференциальных форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_n$, n первых из которых независимы и которые удовлетворяют соотношению

$$[\omega_1 \tilde{\omega}_1] + [\omega_2 \tilde{\omega}_2] + \ldots + [\omega_n \tilde{\omega}_n] = 0,$$

то формы $\tilde{\omega}_i$ являются линейными комбинациями форм ω_i с симметричной матрицей коэффициентов.

Доказательство непосредственное. Если бы среди $2n$ заданных форм было более n линейно независимых, например $n+h$ форм $\omega_1, \ldots, \omega_n, \tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_h$, то можно было бы выразить $n-h$ последних форм $\tilde{\omega}_{h+1}, \ldots, \tilde{\omega}_n$ как линейные функции от предыдущих, но тогда в заданном соотношении первый член $[\omega_1 \tilde{\omega}_1]$ не мог бы уничтожиться ни с каким другим членом. После того как это установлено, имеем

$$\tilde{\omega}_i = \sum_k a_{ik} \omega_k$$

и, выражая, что коэффициент при $[\omega_i \tilde{\omega}_j]$ в правой части заданного соотношения равен нулю, находим $a_{ij} = a_{ji}$.

186. Природа элементов нулевого и первого порядков. Геометрически очевидно, что инвариантов нулевого и первого порядков не существует. Реперами нулевого порядка точки A будут триортогональные триэдры $A\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ с вершиной в A. Реперами первого порядка будут такие реперы нулевого порядка, вектор $\mathbf{I}_3$ которых будет нормален к поверхности.

Матрица вторичных коэффициентов нулевого порядка имеет вид:

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \qquad e_{13}, \ e_{23}, \ e_{12} \text{ произвольны},$$

а матрица вторичных коэффициентов первого порядка — вид:

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad e_{13} = 0, \quad e_{23} = 0, \ e_{12} \text{ произволен}.$$

Когда репер меняется, оставаясь репером первого порядка поверхности, его смещения удовлетворяют уравнению

$$\omega_3 = 0. \tag{17}$$

Главными компонентами реперов первого порядка будут, следовательно, формы

Порядок 0	Порядок 1
$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 \, (=0)$	$\omega_{13}, \ \omega_{23}$

187. Природа элементов второго порядка. В силу уравнений структуры (16) и уравнений (17), внешние производные главных компонент ω_1, ω_2, ω_3, ω_{13}, ω_{23} имеют вид:

$$\omega_1' = [\omega_2\omega_{21}], \qquad \omega_2' = [\omega_1\omega_{12}], \tag{18}$$

$$0 = \omega_3' = [\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}], \tag{19}$$

$$\omega_{13}' = -[\omega_{23}\omega_{12}], \qquad \omega_{23}' = -[\omega_{13}\omega_{21}]. \tag{20}$$

Применение к соотношениям (19) леммы п. **185** позволяет положить

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2. \tag{21}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений, если принять во внимание (18), (20) и (21), дает

$$-[b\omega_1 + c\omega_2, \ \omega_{12}] = a[\omega_2\omega_{21}] + b[\omega_1\omega_{12}] + [da\omega_1] + [db\omega_2],$$

$$-[a\omega_1 + b\omega_2, \ \omega_{21}] = b[\omega_2\omega_{21}] + c[\omega_1\omega_{12}] + [db\omega_1] + [dc\omega_2],$$

что еще можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_1, \ da - 2b\omega_{12}] + [\omega_2, \ db + (a-c)\,\omega_{12}] = 0, \\ &[\omega_1, \ db + (a-c)\,\omega_{12}] + [\omega_2, \ dc - 2b\omega_{21}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Формы $da - 2b\omega_{12}$, $db + (a-c)\omega_{12}$, $dc - 2b\omega_{21}$, в силу леммы, будут линейными комбинациями форм ω_1 и ω_2; следовательно, если изменять только вторичные параметры, эти формы обращаются в нуль; поэтому имеем:

$$\delta a = 2e_{12}b, \quad \delta b = e_{12}(c - a), \quad \delta c = -2e_{12}b. \tag{23}$$

Непосредственно видно, что группа $\mathcal{G}_1$, инфинитезимальное преобразование которой определяется с помощью (23), оставляет инвариантными две величины $a+c$ и $ac - b^2$. К этому результату можно прийти, замечая, что две дифференциальные формы

$$(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2, \quad \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} \tag{24}$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{G}_1$, как это следует из формул, получаемых из (18) и (20):

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega_1 &= e_{12}\omega_2, & \delta\omega_2 &= -e_{12}\omega_1, \\ \delta\omega_{13} &= e_{12}\omega_{23}. & \delta\omega_{23} &= -e_{12}\omega_{13}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Следовательно, можно всегда выбрать две первые оси триэдра первого порядка таким образом, чтобы форма $\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = a(\omega_1)^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c(\omega_2)^2$ имела свой второй коэффициент равным нулю.

Мы определим, следовательно, реперы второго порядка соотношением $b=0$ *. Соответствующие значения a и c обозначим через r_1 и r_2; они образуют инварианты второго порядка.

Группа $\mathcal{G}_2$ — подгруппа группы $\mathcal{G}_1$, которая удовлетворяет условию $\delta b = 0$ для $b=0$; это соотношение влечет $e_{12}=0$, если мы не находимся в исключительном случае, когда $a=c$ (случай, изучаемый в п. 190). Вторичные компоненты второго порядка, следовательно, все будут равны нулю; группа $\mathcal{G}_2$ не зависит ни от каких параметров; репер второго порядка будет *репером Френе;* формы ω_1 и ω_2 будут *инвариантными формами второго порядка.*

188. Природа элементов третьего порядка. Репер порядка $p \geqslant 2$ будет репером Френе.

Инфинитезимальное смещение репера Френе имеет компонентами

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 = 0, \ \omega_{13} = r_1\omega_1, \ \omega_{23} = r_2\omega_2, \ \omega_{12} = \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2; \tag{26}$$

* Более строго, посредством соотношения $b=0$ и неравенства $a>c$.

здесь ρ_1 и ρ_2 — два коэффициента второго порядка, которые образуют два инварианта третьего порядка.

Будет удобно использовать такое обозначение: если f — функция главных параметров, то можно писать

$$df = f_{,1}\omega_1 + f_{,2}\omega_2; \tag{27}$$

функции $f_{,1}$ и $f_{,2}$ будут называться *ковариантными производными* первого порядка функции f. Вторые ковариантные производные также существуют, но они связаны следующим соотношением, получаемым с помощью внешнего дифференцирования (27):

$$f_{,12} - f_{,21} = \rho_1 f_{,1} + \rho_2 f_{,2}.$$

Ковариантные производные инвариантов второго порядка, а именно $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$, также образуют инварианты третьего порядка.

Запишем, что компоненты (26) удовлетворяют уравнениям структуры (16); мы уже выразили, что уравнение структуры (19) удовлетворено; уравнения структуры, которые относятся к ω_1', ω_2', ω_{13}', ω_{23}' и ω_{12}', следовательно, дают нам:

$$\left.\begin{array}{c} \omega_1' = \rho_1[\omega_1\omega_2], \quad \omega_2' = \rho_2[\omega_1\omega_2], \\ r_{1,2} = \rho_1(r_1 - r_2), \quad r_{2,1} = \rho_2(r_1 - r_2), \\ \rho_{1,2} - \rho_{2,1} = r_1 r_2 + \rho_1^2 + \rho_2^2. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Инвариантами третьего порядка будут, следовательно, четыре ковариантных производных от r_1 и r_2.

Природа инвариантов порядков >3. Ограничим наши рассмотрения поверхностями Вейнгартена*, на которых r_2 — функция от r_1. Тогда r_1 и r_2 будут двумя независимыми переменными, ковариантными производными которых будут функции $r_{i,j} = f_{ij}(r_1, r_2)$. В силу п. **131** (стр. 246), инварианты порядка $p > 3$ будут различными частными производными порядка $p - 4$ от четырех функций $f_{ij}(r_1, r_2)$.

189. Условие равенства двух поверхностей. В силу п. **131** (стр. 246), условие равенства двух поверхностей, которые не являются поверхностями Вейнгартена, выражается тем, что четыре функции $f_{ij}(r_1, r_2)$ должны быть одинаковыми для этих двух поверхностей. Если одна из поверхностей будет по-

* Называемыми поверхностями W.

верхностью Вейнгартена, обстоятельства немного осложняются. Тогда следует различать два случая:

1°. Если $r_2 = f(r_1)$ и $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ будут функциями $\varphi(r_1)$, $\psi(r_2)$, то для равенства двух поверхностей необходимо и достаточно, чтобы вторая поверхность была той же природы, что и первая, и с теми же функциями f, φ и ψ. В этом случае две поверхности могут быть наложены бесконечным числом способов; если, например, $r_{1,1} \neq 0$, достаточно разрешить уравнения

$$r_1^* = r_1, \quad \omega_2^* = \omega_2.$$

Легко показать, что обе поверхности будут поверхностями вращения, или геликоидами.

2°. Если $r_2 = f(r_1)$ и одна из ковариантных производных, например $r_{1,1}$, не будет функцией от r_1, то строятся $r_{1,11}$ и $r_{1,12}$, которые будут определенными функциями $\varphi(r_1, r_{1,1})$ и $\psi(r_1, r_{1,1})$; пусть, с другой стороны, $r_{1,2} = \chi(r_1, r_{1,1})$. Тогда для равенства двух поверхностей необходимо и достаточно, чтобы для второй поверхности существовали аналогичные соотношения с теми же функциями f, φ, ψ и χ. В этом случае целое число Q п. **131** будет равно 3 вместо 2, как в предыдущих случаях.

Заметим, что, в силу уравнений структуры, введенные функции не будут произвольными.

Случаи, когда r_1 и r_2 будут постоянными, рассмотрим немного позже (п. **191**).

Условие равенства Гаусса. Гаусс создал дифференциальную теорию поверхностей, он использовал в своих рассуждениях две квадратичные формы относительно дифференциалов параметров поверхности. Если A — точка поверхности и $\mathbf{I}_3$ — единичный нормальный вектор, построенный в точке A, эти формы имеют вид:

$$F = d\mathbf{A}^2, \quad \Phi = -d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{I}_3.$$

Гаусс дал следующее необходимое и достаточное условие равенства двух поверхностей:

«Для того чтобы две поверхности S и S^* были равны или симметричны, необходимо и достаточно, чтобы между точками S и S^* можно было установить взаимно однозначное соответствие, которое отождествляет формы F и Φ поверхности S соответственно с формами F^* и Φ^* поверхности S^*».

Это предложение легко вывести из нашего условия равенства. Рассмотрим триэдр Френе поверхности S, мы имеем:

$$F = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2, \quad \Phi = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = r_1(\omega_1)^2 + r_2(\omega_2)^2;$$

форма $rF-\Phi$ будет квадратом только одной формы Пфаффа, если r будет равно r_1 или r_2; тогда она будет квадратом или формы $\pm\sqrt{r_1-r_2\omega_2}$, или формы $\pm\sqrt{r_2-r_1\omega_1}$. Точечное соответствие между S и S^*, которое отождествляет форму F с формой F^* и форму Φ с формой $\pm\Phi^*$, следовательно, устанавливает соотношения

$$r_1 = r_1^*,\ r_2 = r_2^*,\ \omega_1 = \omega_1^*,\ \omega_2 = \omega_2^* \tag{29}$$

посредством, быть может, преобразования поверхности S^* с помощью симметрии и изменении ориентации S^*.

Соотношения (29) означают, что ковариантные производные различных порядков от r_1 и r_2 будут равны соответствующим производным от r_1^* и r_2^*; r_1, r_2 и их ковариантные производные связаны одной и той же системой соотношений на S и на S^*. В силу нашего условия равенства поверхности S и S^* будут равны.

Более просто: можно заметить, что уравнения (29) можно написать в виде:

$$\omega_1 = \omega_1^*,\ \omega_2 = \omega_2^*,\ \omega_{13} = \omega_{13}^*,\ \omega_{23} = \omega_{23}^*;$$

отсюда получим с помощью уравнений структуры

$$[\omega_2,\ \omega_{21}-\omega_{21}^*] = 0, \quad [\omega_1,\ \omega_{12}-\omega_{12}^*] = 0;$$

форма $\omega_{12}-\omega_{12}^*$, в силу леммы п. **185**, должна быть одновременно кратной форме ω_2 и кратной форме ω_1; следовательно, она тождественно равна нулю. Если каждая компонента ω_{ij} равна соответствующей компоненте $\overset{*}{\omega}_{ij}$, то две поверхности будут равны.

190. Приложение теоремы структуры (стр. 287).

Теорема. *Пусть даны две формы Пфаффа ω_1 и ω_2, зависящие от двух независимых переменных и двух функций r_1 и r_2 этих переменных. Если уравнения (28) удовлетворены, то существует поверхность, формы ω_1 и ω_2 которой будут инвариантными формами второго порядка и функции r_1 и r_2 которой будут инвариантами второго порядка.*

Доказательство. Уравнения (28) выражают, что формы (26) удовлетворяют уравнениям структуры (16). Следовательно, существует подвижной триэдр, относительные компоненты которого будут заданными формами. Этот триэдр является триэдром Френе поверхности, которую описывает его вершина. Эта поверхность и будет искомой поверхностью.

Дополнения. Можно выбрать на поверхности параметры u_1 и u_2, остающиеся постоянными соответственно на кривых, вдоль которых $\omega_1=0$, и на кривых, вдоль которых $\omega_2=0$. Имеем тогда:

$$\omega_1 = h_1(u_1, u_2)\, du_1, \quad \omega_2 = h_2(u_1, u_2)\, du_2.$$

Ковариантные производные функции f имеют вид:

$$f_{,1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad f_{,2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}.$$

Соотношения (28) при этих условиях перепишутся в виде:

$$\rho_1 = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial \ln h_1}{\partial u_2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \ln h_2}{\partial u_1},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{h_2}\frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{h_1}\frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_1},$$

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} = \rho_1^2 + \rho_2^2 + r_1 r_2.$$

Теорема этого пункта утверждает, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовала поверхность, которая соответствует данным функциям h_1, h_2, r_1 и r_2, является выполнение соотношений*:

$$\frac{\partial \ln h_1}{\partial u_2} = -\frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial \ln h_2}{\partial u_1} = \frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_1},$$

$$-\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \ln h_1}{\partial u_2}\right) - \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial \ln h_2}{\partial u_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial \ln h_1}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial \ln h_2}{\partial u_1}\right)^2 + r_1 r_2.$$

191. Геометрические интерпретации. Линии $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 0$ геометрически характеризуются тем свойством, что векторы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{I}_3$ остаются параллельными, когда точка $\mathbf{A}$ описывает одну из этих линий: это *линии кривизны* поверхности. Линии,

---

* Эти формулы, с точностью до обозначений, будут хорошо известными формулами Кодацци для случая, когда поверхность отнесена к линиям кривизны (см. [1], т. II, кн. 5, гл. II).

которые обращают в нуль форму $\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$, будут *асимптотическими линиями*; $f_{,1}$ и $f_{,2}$ будут отношениями приращений функции f к пройденному пути, когда бесконечно мало смещаются в направлении линий кривизны.

Две первые оси трехгранника Френе касаются линий кривизны.

Когда точка перемещается по первой линии кривизны, то

$$d\mathbf{A} = \omega_1\mathbf{I}_1, \quad d\mathbf{I}_1 = \omega_1\rho_1\mathbf{I}_2 + \omega_1 r_1\mathbf{I}_3.$$

Но вектор $\dfrac{d\mathbf{I}_1}{\omega_1}$ расположен на главной нормали этой линии кривизны; его длина равна кривизне этой линии; ρ_1 и r_1 — проекции вектора кривизны на касательную плоскость к поверхности и на нормаль к поверхности. Другими словами, ρ_1 и r_1 будут геодезической кривизной и нормальной кривизной первой линии кривизны. Главными кривизнами поверхности будут величины r_1 и r_2.

192. Поверхности, элемент касания второго порядка которых исключительный. Поставим себе задачей изучить особенную категорию поверхностей, коэффициенты первого порядка которых удовлетворяют уравнениям $a = c$, $b = 0$.

В силу формул (23), группа $\mathfrak{G}_1$ оставляет инвариантными коэффициенты a, b, c. Реперы второго порядка совпадают с реперами первого порядка. Существует инвариант второго порядка: это $r = a = c$. Главными компонентами реперов второго порядка будут формы

Порядок 0	Порядок 1
ω_1, ω_2, $\omega_3\ (=0)$	$\omega_{13} = r\omega_1$, $\omega_{23} = r\omega_2$

Выпишем уравнение структуры:

$$\omega'_{13} = [\omega_{12}\omega_{23}];$$

из него получим

$$r\omega'_1 + [dr\omega_1] = [\omega_{12}\omega_{23}],$$

т. е.

$$r[\omega_2\omega_{21}] + r_{,2}[\omega_2\omega_1] = r[\omega_{12}\omega_2], \text{ или } r_{,2} = 0.$$

Точно так же

$$r_{,1} = 0.$$

Инвариант r будет, следовательно, константой на поверхности; триэдрами Френе будут триэдры первого порядка; зависящая от трех параметров группа перемещений, которые преобразуют одни из этих триэдров в другие, оставляет эту поверхность инвариантной.

Если $r = 0$, мы имеем $d\mathbf{I}_3 = 0$; поверхность есть *плоскость*.

Если $r \neq 0$, мы имеем:

$$dA + \frac{1}{r}\, d\mathbf{I}_3 = \omega_1 \mathbf{I}_1 + \omega_2 \mathbf{I}_2 + \frac{1}{r}\, \omega_{31} \mathbf{I}_1 + \frac{1}{r}\, \omega_{32} \mathbf{I}_2 = 0;$$

вектор $\frac{1}{r}\mathbf{I}_3$ с началом A имеет фиксированный конец; поверхность есть *сфера*.

193. Поверхности, инвариантные относительно двупараметрической группы перемещений. Мы ставим себе задачей отыскать все поверхности, которые преобразуются сами в себя двупараметрической группой перемещений. Эта группа необходимо образована перемещениями, которые совмещают их триэдры Френе. В силу п. **132** (стр. 247), это такие поверхности, все инварианты которых постоянны, исключая сферы и плоскости.

Мы имеем: $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{2,1} = r_{2,2} = 0$; в силу предыдущего пункта $r_1 \neq r_2$; следовательно, в силу уравнений (28), $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $r_1 r_2 = 0$. Предположим, для определенности, $r_1 = \text{const}$, $r_2 = 0$.

Выражения (26) дают нам:

$$dA = \omega_1 \mathbf{I}_1 + \omega_2 \mathbf{I}_2,$$

$$d\mathbf{I}_1 = \omega_1 r_1 \mathbf{I}_3, \quad d\mathbf{I}_2 = 0, \quad d\mathbf{I}_3 = -r_1 \omega_1 \mathbf{I}_1.$$

Вектор $\mathbf{I}_2$ параллелен фиксированному направлению: первые линии кривизны будут параллельными прямыми. Вторые линии кривизны, будучи ортогональными к ним, будут плоскими линиями; их радиус кривизны r_1 постоянен; следовательно, они — окружности.

Искомые поверхности являются *цилиндрами вращения*.

194. Приведенное уравнение. Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности в окрестности одной из ее точек A, отнесенной к трехграннику Френе этой точки. Функция f, которая предполагается разложенной в ряд по степеням x и y, содержит коэффициенты, зависящие от точки A; мы обозначим через $\overline{d}f$ дифференциал функции f, в котором x и y рассматриваются как постоянные. Относительные координаты x, y, z

фиксированной точки P поверхности удовлетворяют уравнениям, выражающим, что дифференциал точки $\mathbf{P} = \mathbf{A} + x\mathbf{I}_1 + y\mathbf{I}_2 + z\mathbf{I}_3$ равен нулю, а именно уравнениям

$$
\begin{aligned}
&dx + \omega_1 + y\omega_{21} + z\omega_{31} = 0,\\
&dy + \omega_2 + x\omega_{12} + z\omega_{32} = 0,\\
&dz \qquad\;\; + x\omega_{13} + y\omega_{23} = 0.
\end{aligned}
$$

Умножая первое уравнение на $-\frac{\partial f}{\partial x}$, второе — на $-\frac{\partial f}{\partial y}$ и складывая с третьим уравнением, получим

$$
\overline{df} + x\omega_{13} + y\omega_{23} - \frac{\partial f}{\partial x}(\omega_1 + y\omega_{21} + z\omega_{31}) -
$$

$$
- \frac{\partial f}{\partial y}(\omega_2 + x\omega_{12} + z\omega_{32}) = 0. \tag{30}
$$

Пусть

$$
f = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) +
$$

$$
+ \frac{1}{6}(\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3) + \ldots
$$

Приравнивая в (30) коэффициенты при различных степенях x и y и заменяя ω_{13}, ω_{23}, ω_{12} их значениями (26), получим:

$$
a = r_1, \quad b = 0, \quad c = r_2,
$$

$$
dr_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad (r_1 - r_2)\,\omega_{12} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \quad dr_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2.
$$

Отсюда получается приведенное уравнение

$$
z = \frac{1}{2}(r_1 x^2 + r_2 y^2) +
$$

$$
+ \frac{1}{6}(r_{1,1}x^3 + 3r_{1,2}x^2 y + 3r_{2,1}xy^2 + r_{2,2}y^3) + \ldots
$$

и, кроме того, уже полученные уравнения (28)

$$
r_{1,2} = (r_1 - r_2)\,\rho_1, \quad r_{2,1} = (r_1 - r_2)\,\rho_2.
$$

Приведенное уравнение выделяет дифференциальные инварианты трех первых порядков.

195. Изгибание поверхностей. Две поверхности называются налагающимися в смысле Гаусса, если между ними можно установить точечное соответствие, приводящее к совпадению их две первые основные формы. Присоединим к каждой точке A одной из поверхностей S трехгранник первого порядка, зависящий, следовательно, от двух главных и одного вторичного параметра; каждому выбору этого трехгранника соответствует разложение первой основной формы на сумму двух квадратов $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$. Отсюда следует, что всякому трехграннику первого порядка, присоединенному к S, соответствует трехгранник первого порядка, присоединенный к S^* и осуществляющий равенства

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*. \tag{31}$$

От возможности соотношений этого вида и зависит наложимость двух поверхностей. Дифференцирование соотношений (31), если принять во внимание уравнения структуры (16), дает:

$$[\omega_2, \omega_{21}^* - \omega_{21}] = 0, \quad [\omega_1, \omega_{12} - \omega_{12}^*] = 0,$$

откуда получаем дополнительное соотношение

$$\omega_{12} = \omega_{12}^*. \tag{32}$$

Новое дифференцирование дает

$$[\omega_{13}\omega_{23}] = [\omega_{13}^*\omega_{23}^*],$$

или еще

$$ac - b^2 = a^*c^* - (b^*)^2,$$

если положить:

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2,$$
$$\omega_{13}^* = a^*\omega_1^* + b^*\omega_2^*, \quad \omega_{23}^* = b^*\omega_1^* + c^*\omega_2^*.$$

Но мы видели, что $ac - b^2$ — инвариант второго порядка поверхности S, более точно, это — полная кривизна $r_1 r_2 = K$. Отсюда получается теорема Гаусса, в силу которой *две налагающиеся поверхности имеют в соответствующих точках одну и ту же полную кривизну.*

Будем теперь искать необходимое и достаточное условие наложимости двух данных поверхностей.

Следует различать несколько случаев.

1°. *K постоянно.* Всякая поверхность S^*, наложимая на S, должна также иметь постоянную полную кривизну, равную K. Это условие и достаточно, ибо соотношения (31) и (32) будут вполне интегрируемы в силу общих уравнений структуры, которым удовлетворяют формы ω_1, ω_2, ω_{12}:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1' = [\omega_2\omega_{21}], \quad \omega_2' = [\omega_1\omega_{12}], \quad \omega_{12}' = -K[\omega_1\omega_2], \\ &(\omega_1^*)' = [\omega_2^*\omega_{21}^*], \ (\omega_2^*)' = [\omega_1^*\omega_{12}^*], \ (\omega_{12}^*)' = -K[\omega_1^*\omega_2^*]. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Кроме того, мы видим, что каждая поверхность допускает бесконечное множество наложений самой на себя, порождая трехпараметрическую группу, для которой уравнения (33) будут уравнениями структуры.

2°. *K непостоянно.* Определим триэдр первого порядка, присоединенный к каждой поверхности так, чтобы вектор $\mathbf{I}_2$ касался линий равной постоянной кривизны. При наложении двух поверхностей таким образом определенные триэдры должны прийти в совпадение. Пусть теперь

$$dK = K_1\omega_1, \quad dK^* = K_1^*\omega_1^*;$$

в двух соответствующих точках должны тогда иметь:

$$K_1 = K_1^*.$$

a. Предположим, что не существует никаких соотношений между K и K_1, и пусть $K_{1,1} = f_1(K, K_1)$, $K_{1,2} = f_2\ (K, K_1)$. Для поверхности S^* должны выполняться такие же соотношения $K_{1,1}^* = f_1\ (K^*, K_1{}^*)$, $K_{1,2}^* = f_2(K^*, K_1{}^*)$. Это условие необходимое и достаточное. Действительно, если между двумя поверхностями установлено точечное соответствие, определяемое уравнениями

$$K = K^*, \quad K_1 = K_1^*,$$

то в то же время будем иметь

$$K_{1,1} = K_{1,1}^*, \quad K_{1,2} = K_{1,2}^*.$$

Соотношения $dK = dK^*$, $dK_1 = dK_1^*$ дают тогда

$$K_1\omega_1 = K_1^*\omega_1^*, \ K_{1,1}\omega_1 + K_{1,2}\omega_2 = K_{1,1}^*\omega_1^* + K_{1,2}^*\omega_2^*,$$

откуда

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*.$$

b. Предположим, наконец, что K_1 будет функцией $f(K)$. Форма ω_1 будет точным дифференциалом $\frac{dK}{f(K)}$, и получим:

$$\omega_{12} = \rho_2\omega_2.$$

Надо еще рассмотреть два случая:

b_1. Функция ρ_2 независима от K. Пусть тогда

$$\rho_{2,1} = \varphi_1(K, \rho_2), \quad \rho_{2,2} = \varphi_2(K, \rho_2).$$

Чтобы поверхность S^* налагалась на S, необходимо и достаточно, чтобы

$$K_1^* = f(K^*), \ \rho_{2,1}^* = \varphi_1(K^*, \rho_2^*), \ \rho_{2,2}^* = \varphi_2(K^*, \rho_2^*);$$

наложение осуществляется точечным соответствием, определяемым с помощью соотношений

$$K^* = K, \quad \rho_2^* = \rho_2,$$

которые дают

$$K_1^* = K_1, \quad \rho_{2,1}^* = \rho_{2,1}, \quad \rho_{2,2}^* = \rho_{2,2},$$

$$f(K^*)\,\omega_1^* = f(K)\,\omega_1, \ \varphi_1(K^*, \rho_2^*)\,\omega_1^* + \varphi_2\,(K^*, \rho_2^*)\,\omega_2^* =$$

$$= \varphi_1(K, \rho_2)\,\omega_1 + \varphi_2(K, \rho_2)\,\omega_2,$$

т. е.

$$\omega_1^* = \omega_1, \quad \omega_2^* = \omega_2.$$

b_2. Функция ρ_2 зависит только от K: $\rho_2 = \varphi(K)$. Тогда достаточно, чтобы $K_1^* = f(K^*)$, $\rho_2^* = \varphi(K^*)$. Наложение осуществляется посредством интегрирования уравнений

$$K^* = K, \quad \omega_2^* = \omega_2,$$

второе из которых вполне интегрируемо, если принять во внимание первое. Поверхность S допускает ∞^1 наложений сама на себя; она налагается на поверхность вращения.

Заметим аналогию, которая существует между решением проблемы наложения и проблемы равенства. Эта аналогия заключается в том, что первая проблема может привестись к проблеме попарного равенства трех линейно независимых форм Пфаффа от трех переменных ω_1, ω_2, ω_3 с тремя аналогичными формами ω_1^*, ω_2^*, ω_3^* [уравнения (31) и (32)].

196. Краткие сведения об общей проблеме изгибания. Задачу изгибания Гаусса можно представить в следующем виде. Две поверхности S и S^* называются наложимыми, если между этими поверхностями можно установить такое точечное соответствие, что если A и A^* — две соответствующие точки этих поверхностей, то существует такое движение, переводящее A^* в A, что всякая точка поверхности S^*, бесконечно близкая к A^*, будет совпадать, с точностью до бесконечно малых второго порядка, с соответствующей точкой поверхности S. Действительно, если T — триэдр первого порядка, присоединенный к точке A, то триэдр T^*, который должен быть присоединен к точке A^*, чтобы рассматриваемое перемещение привело T^* к совпадению с T, характеризуется соотношениями (31)

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*.$$

Предыдущая формулировка вызывает очевидное обобщение, прилагаемое к двум многообразиям V_λ в геометрии заданной группы G [12]. Два многообразия V_λ и $\overset{*}{V}_\lambda$ будут называться наложимыми порядка p, если между ними можно установить такое точечное соответствие, что если A и A^* — две соответствующие точки этих многообразий, то существует преобразование группы G, приложение которого к $\overset{*}{V}_\lambda$ переводит A^* в A и каждую точку $\overset{*}{V}_\lambda$, бесконечно близкую к A^*, в соответствующую точку V_λ, с точностью до бесконечно малых порядка $p+1$. В случае Гаусса $p=1$. Можно еще присоединить дополнительное условие, что под действием рассматриваемого преобразования многообразие $\overset{*}{V}_\lambda$ должно иметь в точке A с многообразием V_λ касание заданного порядка $q \geqslant p$. Проективное наложение поверхностей $\lambda = p = 2$ было объектом многочисленных исследований. Все эти проблемы наложения хорошо решаются методом подвижного репера [20].

Глава XIII

ТРЕТЬЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ГРУПП

I. ПРЯМАЯ ЧАСТЬ ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

197. Внешняя производная билинейной альтернированной дифференциальной формы*. Рассмотрим билинейную альтернированную дифференциальную форму

$$\Omega(\delta' x, \delta'' x) = \sum_{i,j} A_{ij}(x)(\delta' x_i \delta'' x_j - \delta' x_j \delta'' x_i). \tag{1}$$

Введем третью систему дифференциалов δX_i, символы δ, δ', δ'' предполагаются перестановочными. Будем называть *внешней производной* формы Ω выражение

$$\Omega' = \delta\Omega(\delta', \delta'') + \delta'\Omega(\delta'', \delta) + \delta''\Omega(\delta, \delta'). \tag{2}$$

Это трилинейная форма относительно δx_i, $\delta' x_i$, $\delta'' x_i$; выражения $\delta\delta' x_i$, $\delta'\delta'' x_i$, $\delta''\delta x_i$ здесь не встречаются; при изменении выбора независимых переменных значение этой формы остается постоянным.

Чтобы уметь обращаться с такими трилинейными формами, удобно положить

$$\begin{vmatrix} \delta x_1 & \delta' x_1 & \delta'' x_1 \\ \delta x_2 & \delta' x_2 & \delta'' x_2 \\ \delta x_3 & \delta' x_3 & \delta'' x_3 \end{vmatrix} = [dx_1 dx_2 dx_3].$$

* Вообще можно определить внешнюю производную для всякой внешней дифференциальной формы, см. E. Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux.* Hermann, 1922, гл. VIII, стр. 65—71; см. также: Э. Картан. *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.* Изд-во МГУ, 1962, стр. 36.

Эта величина называется *внешним произведением* трех дифференциалов dx_1, dx_2, dx_3. Это внешнее произведение будет ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, внешнее произведение форм

$$\omega_1 = \sum_i a_i dx_i, \quad \omega_2 = \sum_i b_i dx_i, \quad \omega_3 = \sum_i c_i dx_i$$

будет, по определению, равно

$$[\omega_1 \omega_2 \omega_3] = [[\omega_1 \omega_2]\, \omega_3] = \sum_{i,\, j,\, k} a_i b_j c_k\, [dx_i dx_j dx_k].$$

Внешнее произведение трех линейных форм остается постоянным, когда множители подвергаются четной перестановке; оно меняет знак, когда множители подвергаются нечетной перестановке.

Значение внешней производной Ω' формы (1) равно

$$\Omega'(\delta, \delta', \delta'') = \sum_{i,\, j,\, k} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} [dx_i dx_j dx_k] =$$

$$= \sum_{(i,\, j,\, k)} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} \right) [dx_i dx_j dx_k].$$

Предположим, что Ω будет внешней производной линейной формы

$$\omega = \sum_i a_i(x)\, dx_i.$$

Мы имеем

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial a_i} - \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

Следовательно, внешняя производная от внешней производной равна 0*.

---

* Обратная к этому предложению теорема верна, по крайней мере, локально.

Читатель легко установит следующую формулу: пусть даны две линейные формы ω_1 и ω_2; тогда имеем:

$$[\omega_1\omega_2]' = [\omega_1'\omega_2] - [\omega_2'\omega_1]. \qquad (3)$$

198. Внешнее дифференцирование уравнений структуры Э. Картана

$$\omega_s' = \frac{1}{2}\sum_{p,\,q} c_{pqs}[\omega_p\omega_q] \quad (1 \leqslant s \leqslant r,\ 1 \leqslant p \leqslant r,\ 1 \leqslant q \leqslant r).$$

Внешняя производная от левой части равна нулю, потому что она сама является внешней производной. Внешняя производная от правой части равна

$$\frac{1}{2}\sum_{p,\,q} c_{pqs}[\omega_p'\omega_q] - \frac{1}{2}\sum_{p,\,q} c_{pqs}[\omega_q'\omega_p] =$$

$$= \sum_{p,\,q} c_{pqs}[\omega_p'\omega_q] = \frac{1}{2}\sum_{p,\,q,\alpha,\,\beta} c_{pqs}c_{\alpha\beta p}[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_q].$$

Следовательно, если заменить q на γ, мы получим:

$$\sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,p} c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s}[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma] = 0,$$

т. е.

$$\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)}\sum_{p}(c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s})[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma] = 0.$$

Но величины ω_α, ω_β, ω_γ линейно независимы, если $1 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant r$. Следовательно,

$$\sum_{p=1}^{r}(c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s}) = 0.$$

199. Третья основная теорема теории групп (С. Ли). *Чтобы r^3 величин c_{pqs} были структурными константами некоторой группы, зависящей от r параметров, необходимо и достаточно, чтобы эти величины удовлетворяли соотношениям*

$$c_{pqs} + c_{qps} = 0 \quad \left(\frac{r^2(r-1)}{2}\ \text{соотношений}\right), \qquad (4)$$

$$\sum_{p=1}^{r} c_{\alpha\beta p} c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p} c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p} c_{p\alpha s}) = 0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{r^2(r-1)(r-2)}{6} \text{ соотношений}\right).$$

Мы уже доказали, что эти соотношения необходимы.

Доказать обратное предложение, в силу второй основной теоремы (п. **165**, стр. 288), — значит разрешить следующую проблему: для заданных постоянных c_{pqs}, удовлетворяющих соотношениям (4) и (5), построить пространство E r измерений и r форм Пфаффа ω_s, функций точек пространства E, которые удовлетворяют следующим условиям:

1°.

$$\omega_s' = \sum_{(p,\,q)} c_{pqs}[\omega_p \omega_q].$$

2°. Пространство E содержит только внутренние точки.

3°. Формы ω_s линейно независимы в каждой точке пространства E.

4°. Когда интеграл $\int_L \sqrt{\sum_{s=1}^{r} |\omega_s|^2}$ сходится, то путь L сходится в точку пространства E.

Мы будем считать пространство E просто связным (см. сноску на стр. 288).

Эта задача допускает не более одного решения, потому что две группы голоэдрически изоморфны, если они имеют одни и те же структурные константы и пространства параметров их просто связны (см. условие изоморфизма, п. **164**, стр. 288).

Одной из трудностей этой задачи является построение пространства E, топология которого неизвестна и в качестве которого нельзя, вообще говоря, выбрать евклидово пространство r измерений.

Прежде чем пытаться доказать это обращение третьей основной теоремы, мы определим в пространстве параметров группы исключительно простую систему координат.

200. Свойства канонических параметров. Пусть дана конечная и непрерывная группа S преобразований S_ξ; рассмотрим переменный репер $R_{\xi(t)}$, который зависит от аргумента t, движение которого равномерно и который совпадает с репером R_0 при $t = 0$: это означает, что отношения

$$\frac{\omega_1(\xi, d\xi)}{dt}, \ldots, \frac{\omega_r(\xi, d\xi)}{dt} \tag{6}$$

будут постоянными величинами $a_1, \ldots, a_r$.

Когда $a_1, \ldots, a_r$ заданы, точка ξ (1) вполне определена; это точка пространства параметров была названа С. Ли точкой *канонических параметров* $a_1, \ldots, a_r$. $\xi(t)$ — точка с каноническими параметрами $a_1 t, \ldots, a_r t$.

Когда t меняется, параметры $a_1, \ldots, a_r$ остаются фиксированными, преобразования $\sum_t = S_{\xi(t)}$ порождают однопараметрическую группу, потому что инфинитезимальное преобразование $\sum_t^{-1} \sum_{t+dt}$ имеет символом $dt(a_1 X_1 + \ldots + a_r X_r)$ и имеет, следовательно, относительную компоненту dt. Группа параметров задается уравнением $dt' = dt$; следовательно, имеем

$$\sum\nolimits_{t'} \sum\nolimits_{t''} = \sum\nolimits_{t'+t''}; \tag{7}$$

эта формула выражает, что произведение преобразований с каноническими параметрами $a_1 t', \ldots, a_r t'$ и $a_1 t'', \ldots, a_r t''$ есть преобразование с каноническими параметрами $a_1(t' + t''), \ldots, a_r(t' + t'')$.

Другими словами: *в пространстве $(a_1, \ldots, a_r)$ канонических параметров прямые, проходящие через начало, представляют подгруппы; на каждой из этих прямых закон композиции группы сводится к сложению координат одного и того же индекса.*

Например, противоположным значениям канонических параметров $a_1, \ldots, a_r$ и $-a_1, \ldots, -a_r$ соответствуют обратные преобразования.

В силу формул (7), имеем:

$$S_{\xi(t')} S_{\xi(t'')} = S_{\xi(t'')} S_{\xi(t')}. \tag{8}$$

Впрочем, вообще два произвольных преобразования непрерывной группы, зависящей от одного параметра, будут перестановочны, так как, в силу п. **167** (стр. 292), такая группа изоморфна группе переносов по прямой.

Формула (8) дает

$$S_{\xi(t)}^{-1} S_{\xi(t+dt)} = S_{\xi(t+dt)} S_{\xi(t)}^{-1}.$$

Следовательно, репер $R_{\xi(t)}$ имеет одни и те же абсолютные и относительные компоненты:

$$\omega_s(\xi, d\xi) = \widetilde{\omega}_s(\xi, d\xi) = a_s dt. \tag{9}$$

Рассмотрим точку, которая остается неподвижной относительно репера $R_{\xi(t)}$ и абсолютные координаты которой равны $x_1, \ldots, x_n$. Компоненты скорости этой точки равны

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{p=1}^{r} \frac{\widetilde{\omega}_p}{dt} X_p x_i,$$

т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{p=1}^{r} a_p X_p x_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Преобразование S_ξ с каноническими параметрами $a_1, \ldots, a_r$, следовательно, производится так: интегрируют систему (10); точке M_0 с координатами $x_i(0)$ ставят в соответствие точку M_1 с координатами $x_i(1)$; получают $M_1 = S_\xi M_0$ (см. пп. **85**, **86**, стр. 188—190).

201. Канонические параметры в пространстве параметров являются локальными координатами. Если дать $a_1, \ldots, a_r$ очень малые значения $da_1, \ldots, da_r$, то соответствующая точка ξ будет очень близка к нулю, и ее координаты $d\xi_1, \ldots, d\xi_r$ будут определяться соотношением

$$\omega_s(0, d\xi) = da_s. \tag{11}$$

Эти соотношения доказывают, что $d\xi_1, \ldots, d\xi_r$ будут независимыми линейными комбинациями дифференциалов $da_1, \ldots, da_r$. Это означает, что функциональный определитель $\frac{D(\xi)}{D(a)}$ отличен от нуля в начале координат. Следовательно, системы канонических параметров в окрестности системы $(0, \ldots, 0)$ взаимно однозначно соответствуют точкам пространства параметров, лежащим в окрестности начала.

Если каждой точке пространства параметров всегда соответствует одна и только одна система канонических параметров, то всегда можно отождествить пространство пара-

метров с евклидовым пространством r измерений. Но пример группы вращения трехмерного евклидова пространства показывает, что такое отождествление не всегда возможно, даже когда пространство параметров просто связно.

На двух очень простых примерах мы покажем, что *вообще канонические параметры можно использовать в качестве координат пространства параметров только в окрестности начала.*

Рассмотрим сначала группу движений в пространстве. Всякое движение там будет винтовым. Но винтовое движение, состоящее из переноса на расстояние l и вращения на угол θ, может быть разложено на бесконечное множество винтовых движений с приведенным шагом $\frac{1}{\theta + 2k\pi}$ (k — произвольное целое число: положительное, отрицательное или нуль). Каждое перемещение имеет, следовательно, *бесконечное число канонических параметров.*

Рассмотрим группу действительных линейных подстановок с двумя переменными:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y, \\ y' &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma > 0). \right\} \tag{12}$$

Ее реперами будут такие пары векторов $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, что $\mathbf{I}_1 \Lambda \mathbf{I}_2 > 0$. Геометрически устанавливается, что это семейство реперов непрерывно. Следовательно, группа (11) тоже непрерывна. Уравнения (10) в этом случае записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + a_2 y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_3 x + a_4 y. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Интегрирование системы (13) дает все преобразования группы (12), которые обладают каноническими параметрами.

Систему (13) интегрируют, отыскивая все такие линейные комбинации с постоянными коэффициентами $\lambda x + \mu y$, что

$$\frac{d}{dt}(\lambda x + \mu y) = k(\lambda x + \mu y) \quad (k = \text{const});$$

k, λ и μ определяются с помощью уравнений

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_3 \\ a_2 & a_4 - k \end{vmatrix} = 0, \quad \left.\begin{aligned} \lambda(a_1 - k) \quad + \mu a_3 &= 0, \\ \lambda a_2 + \mu(a_4 - k) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Предположим сначала, что уравнение на k, или характеристическое уравнение, имеет два действительных и различных корня k_1 и k_2. Конечное преобразование канонических параметров a_1, a_2, a_3, a_4 приводится тогда к виду

$$\lambda_1 x' + \mu_1 y' = e^{k_1}(\lambda_1 x + \mu_1 y), \quad \lambda_2 x' + \mu_2 y' = e^{k_2}(\lambda_2 x + \mu_2 y); \tag{15}$$

характеристическое уравнение этого преобразования имеет корнями e^{k_1} и e^{k_2}: или эти два корня будут положительными действительными числами, или они будут сопряженными комплексными числами (мнимыми сопряженными или действительными равными отрицательными).

Если уравнение на k имеет два равных (необходимо действительных) корня, то конечное преобразование канонических параметров a_1, a_2, a_3, a_4 приводится к виду

$$\lambda x' + \mu y' = e^k(\lambda x + \mu y), \quad y' = e^k y + h(\lambda x + \mu y); \tag{16}$$

его характеристическое уравнение имеет два совпадающих положительных действительных корня e^k.

Сразу видно, что конечное преобразование

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y,$$

где α и β — два различных отрицательных действительных числа, не входит ни в одну из полученных категорий; оно не обладает каноническими параметрами.

202. Выражение форм ω_s в виде функций от канонических параметров. Рассмотрим подвижной репер $R_{\xi(t)}$, который зависит от параметра t. Предположим, что он определен заданием начального положения репера $R_{\xi(0)}$ и относительных компонент своего инфинитезимального смещения

$$\omega_s[\xi(t),\ d\xi(t)] = \lambda_s(t)\,dt.$$

Предположим, что эти данные будут функциями от других параметров $a_1, \ldots$. Дадим этим параметрам приращения $\delta a_1, \ldots$. Функции $\lambda_s(t)$ получают приращения $\delta\lambda_s(t)$; репер $R_{\xi(t)}$ подвергается при каждом значении t инфинитезимальному смещению, характеризуемому своими относительными компонентами

$$\omega_s[\xi(t),\ \delta\xi(t)].$$

Величины $\omega_s[\xi(t), \delta\xi(t)]$ легко определить при помощи величин $\lambda_s(t)$, $\delta\lambda_s(t)$, $\omega_s[\xi(0), \delta\xi(0)]$.

Символ δ и символ d дифференцирования относительно t перестановочны. В силу уравнений структуры Э. Картана, мы имеем

$$d\omega_s[\xi(t),\ \delta\xi(t)] - \delta\lambda_s(t)\,dt = \sum_{p,q} c_{pqs}\lambda_p(t)\,dt\,\omega_q[\xi(t),\ \delta\xi(t)].$$

Следовательно, формы ω_s, значения которых при $t = 0$ известны, получаются в результате интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \delta\lambda_s + \sum_{p,\,q} c_{pqs}\lambda_p\omega_q. \tag{17}$$

Предположим, в частности, что функции λ_s будут константами a_s и что $\xi(0) = 0$. Только что изложенное дает нам средство вычислить выражение $\omega_s(a,\ \delta a)$ относительных компонент в виде функций от канонических параметров a_s и их дифференциалов δa_s.

Надо проинтегрировать линейную дифференциальную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \delta a_s + \sum_{p,q} c_{pqs}a_p\omega_q \tag{18}$$

*и выбрать тот из ее интегралов, который при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям $\omega_s = 0$; этот интеграл представляет * форму $\omega_s(ta,\ t\,\delta a)$.*

Замечание. Аналогичные рассуждения прилагаются к абсолютным компонентам; следует лишь заменить уравнения (17) и (18) следующими уравнениями:

$$\frac{d\widetilde{\omega}_s}{dt} = \delta\lambda_s - \sum_{p,q} c_{pqs}\lambda_p\widetilde{\omega}_q, \tag{19}$$

$$\frac{d\widetilde{\omega}_s}{dt} = \delta a_s - \sum_{p,q} c_{pqs}a_p\widetilde{\omega}_q. \tag{20}$$

* ta означает точку с координатами $ta_1, \ldots, ta_r$; $t\delta a$ означает вектор с компонентами $t\delta a_1, \ldots, t\delta a_r$.

III. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (НЕПОЛНОЕ) ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

203. Построение форм ω_s, удовлетворяющих уравнениям структуры Э. Картана. Пусть даны постоянные c_{pqs}, удовлетворяющие соотношениям

$$c_{pqs} + c_{qps} = 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant r;\ 1 \leqslant q \leqslant r;\ 1 \leqslant s \leqslant r). \quad (21)$$

Заключения предыдущего пункта подсказывают следующие операции.

Введем r параметров $a_1, \ldots, a_r$ и их дифференциалы $\delta a_1, \ldots, \delta a_r$; выпишем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \delta a_s + \sum_{p,q} c_{pqs} a_p \omega_q; \quad (22)$$

рассмотрим то из ее решений, которое при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям $\omega_s = 0$; оно зависит от t, a_p, δa_p, которые входят в это решение в виде произведений ta_p, $t\delta a_p$; оно линейно и однородно относительно переменных $t\delta a_p$; обозначим его через

$$\omega_s(ta,\ t\,\delta a).$$

Найдем, при каких условиях формы Пфаффа $\omega_s(ta,\ t\,\delta a)$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\omega_s'(ta, t\,\delta a, t\,\delta' a) = \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\omega_p(ta, t\,\delta a)\,\omega_q(ta, t\,\delta a)]; \quad (23)$$

формы $\omega_s(a,\ \delta a)$, разумеется, удовлетворяют тогда и уравнениям

$$\omega_s'(a, \delta a, \delta' a) = \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\omega_p(a, \delta a)\,\omega_q(a, \delta a)]. \quad (23')$$

Подсчитаем внешние производные от обеих частей (22) относительно переменных a_s; мы получим

$$\frac{d}{dt}\,\omega_s'(ta, t\,\delta a, t\,\delta_a') = \sum_{p,q} c_{pqs} [\delta a_p \omega_q(ta, t\,\delta a)] +$$

$$+ \sum_{p,q} c_{pqs} a_p \omega_q'(ta, t\,\delta a,\ t\,\delta' a); \quad (24)$$

ω'_s $(ta, t\delta a, t\delta' a)$ будет таким из решений этой линейной дифференциальной системы, которое при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям $\omega'_s = 0$. Выражение

$$\sum_{(p,q)} c_{pqs}\left[\omega_p(ta, t\,\delta a)\,\omega_q(ta, t\,\delta a)\right] \tag{25}$$

обращается в нуль вместе с t. Чтобы имело место соотношение (23), необходимо и достаточно, чтобы система (24) удовлетворялась, если в ней ω'_s заменить выражением (23). Соотношение

$$\frac{d}{dt}\sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p\omega_q] = \sum_{p,q} c_{pqs}[\delta a_p\omega_q] + \\ + \sum_{p,q}\sum_{(\alpha,\beta)} c_{pqs}a_p c_{\alpha\beta q}[\omega_\alpha\omega_\beta] \tag{26}$$

должно, следовательно, быть удовлетворено, если принять во внимание (22).

Но, в силу (22), мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p\omega_q] = \sum_{(p,q)} c_{pqs}\left[\frac{d\omega_p}{dt}\,\omega_q\right] + \\ + \sum_{(p,q)} c_{pqs}\left[\omega_p\,\frac{d\omega_q}{dt}\right] = \sum_{p,q} c_{pqs}\left[\frac{d\omega_p}{dt}\,\omega_q\right] = \\ = \sum_{p,q} c_{pqs}[\delta a_p\omega_q] + \sum_{p,q}\sum_{\alpha,\beta} c_{pqs}c_{\alpha\beta p}a_\alpha[\omega_\beta\omega_q].$$

Соотношение (26), следовательно, запишется в виде:

$$\sum_{p,q}\sum_{\alpha,\beta} c_{pqs}c_{\alpha\beta p}a_\alpha[\omega_\beta\omega_q] = \sum_{p,q}\sum_{(\alpha,\beta)} c_{pqs}a_p c_{\alpha\beta q}[\omega_\alpha\omega_\beta],$$

т. е., меняя индексы суммирования,

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,p} a_\alpha[\omega_\beta\omega_\gamma]\left(c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} - \frac{1}{2}c_{\beta\gamma p}c_{\alpha p s}\right) = 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha,p}\sum_{(\beta,\gamma)} a_\alpha [\omega_\beta\omega_\gamma] (c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s}) = 0.$$

Но величины a_α произвольны, а формы ω_s линейно независимы, когда $ta_1, \ldots, ta_r$ будут достаточно малы; выражения в скобках в предыдущей формуле должны быть тождественно равны нулю. Наше заключение будет, следовательно, следующим:

Для того чтобы интегрирование уравнений (22) *давало формы* ω_s, *удовлетворяющие уравнениям структуры* (23′), *необходимо и достаточно, чтобы постоянные* c_{pqs} *удовлетворяли соотношениям*

$$c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s} = 0. \tag{27}$$

204. Приложение результата предыдущего пункта к доказательству третьей основной теоремы. Пусть задана группа; относительные компоненты ее репера удовлетворяют уравнениям структуры (23) (вторая основная теорема, п. **165**, стр. 288). В силу предыдущего пункта, соотношения (27) необходимо будут иметь место. Следовательно, мы второй раз доказали прямую часть третьей основной теоремы.

Приступим к доказательству обратной части этой теоремы. Зададим постоянные c_{pqs}, удовлетворяющие соотношениям (21) и (27). Предыдущий пункт показал нам, что можно в евклидовом пространстве с координатами $a_1, \ldots, a_r$ определить r форм Пфаффа $\omega_s(a, da)$, которые удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\omega_s' = \sum_{(p,q)} c_{pqs}[\omega_p\omega_q].$$

Мы имеем $\omega_s(0, da) = da_s$; формы $\omega_s(a, da)$ будут, следовательно, независимыми в окрестности точки $(0, \ldots, 0)$. Но нет никаких доводов, которые бы позволили утверждать, что эти формы независимы в каждой точке и что путь L сходится, когда сходится интеграл $\int_L \sqrt{\sum_{s=1}^{r} |\omega_s|^2}$.

Таким образом мы не придем к полному доказательству обратной части третьей основной теоремы; мы придем только к построению решений уравнений структуры Э. Картана. П. **218** (стр. 361) покажет, какой другой путь позволяет полностью установить эту обратную теорему.

Когда эти два условия удовлетворены *, преобразования, оставляющие формы ω_s инвариантными, образуют группу, пространство параметров которой будет евклидовым пространством, образованным точками $(a_1, \ldots, a_r)$; всякое преобразование этой группы имеет одну и только одну систему канонических параметров. Примеры п. **201** (стр. 335) показывают, что эти обстоятельства исключительные.

---

* Они будут удовлетворены, если характеристические корни уравнений (22) без правой части, т. е. уравнений (22) с откинутыми членами δa_s, все равны нулю (группы нулевого ранга).

Глава XIV

УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ СОФУСА ЛИ

I. СКОБКИ ДВУХ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

205. Преобразование, сопряженное к инфинитезимальному преобразованию с помощью другого инфинитезимального преобразования. Пусть даны два бесконечно малых преобразования S и T, которые обладают обратными и оперируют над одной и той же областью D; зададимся их символами:

$$Xf = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{S}$$

$$Yf = \sum_{k=1}^{n} \eta_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{T}$$

Найдем символ преобразования $S^{-1}TS$, сопряженного к T с помощью S^{-1}; пусть это будет символ

$$Zf = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Этот символ выводится из уравнений (3) п. **62** (стр. 158), если заменить φ_i на $x_i + \xi_i$; отсюда, пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, получим

$$\zeta_i + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \eta_i + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \ldots .$$

Следовательно, главной частью ζ_i будет η_i; предыдущие уравнения напишутся поэтому в виде:

$$\zeta_i = \eta_i + \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right). \tag{1}$$

Дадим определение: *скобкой двух заданных инфинитезимальных преобразований*

$$Xf = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

будем называть и обозначать $(XY)\,f$ *инфинитезимальное преобразование*

$$(XY)\,f = \sum_{k,i} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Формула (1) выражает, что символом преобразования $S^{-1}\,TS$ будет $Yf + (XY)\,f$; следовательно, можно сформулировать этот результат следующим образом:

Преобразованием, сопряженным к инфинитезимальному преобразованию Yf с помощью инфинитезимального преобразования Xf, является инфинитезимальное преобразование

$$Yf + (YX)\,f. \tag{3}$$

206. Свойства скобок. Мы имеем:

$$(XY)\,f = -(YX)f, \quad (XX)\,f = 0. \tag{4}$$

Можно записать:

$$(XY)f = \sum_{k,i} \left\{ \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right\},$$

т. е.

$$(XY)f = X\,(Yf) - Y\,(Xf). \tag{5}$$

Рассмотрим два дифференцирования d и δ, определяемые формулами

$$dx_i = \xi_i, \qquad \delta x_i = \eta_i.$$

Мы имеем:

$$df = Xf, \quad \delta f = Yf, \quad d\delta f - \delta df = (XY)f.$$

Следовательно, эти два дифференцирования переместительны, если скобка (XY) равна нулю, и только в этом случае.

Три произвольных инфинитезимальных преобразования Xf, Yf, Zf удовлетворяют *тождеству Якоби*:

$$[X(YZ)]f + [Y(ZX)]f + [Z(XY)]f = 0. \tag{6}$$

Развертывая левую часть, мы действительно получим:

$$[X(YZ)]f + [Y(ZX)]f + [Z(XY)]f = X(YZ)f + Y(ZX)f +$$
$$+ Z(XY)f - (YZ)Xf - (ZX)Yf - (XY)Zf =$$
$$= XYZf + YZXf + ZXYf - XZYf - YXZf - ZYXf -$$
$$- YZXf - ZXYf - XYZf + ZYXf + XZYf + YXZf = 0.$$

207. Приложение к теории групп*. Рассмотрим конечную непрерывную группу и ее инфинитезимальные преобразования

$$X_1 f, \ldots, X_r f.$$

Преобразование, сопряженное бесконечно малому преобразованию группы с помощью другого бесконечно малого преобразования группы, снова принадлежит группе. Заключение п. **205**, следовательно, дает новое заключение о том, что скобки двух инфинитезимальных преобразований группы будут также инфинитезимальным преобразованием группы; мы имеем формулу вида

$$(X_p X_q)f = \sum_{s=1}^{r} c'_{pqs} X_s f, \tag{7}$$

где коэффициенты c'_{pqs} — постоянные величины.

---

* Софус Ли, создатель теории непрерывных групп, не употреблял компонент ω, $\tilde{\omega}$. Но понятие скобок играло фундаментальную роль в его рассуждениях.

В силу (4),

$$c'_{pqs} + c'_{qps} = 0. \tag{8}$$

Тождество Якоби дает соотношения

$$\sum_{p=1}^{r} (c'_{\alpha\beta p} c'_{p\gamma s} + c'_{\gamma\alpha p} c'_{p\beta s} + c'_{\beta\gamma p} c'_{p\alpha s}) = 0. \tag{9}$$

П. **210** даст второе доказательство того, что $(X_p X_q)$ будет инфинитезимальным преобразованием группы; преимущество этого второго доказательства в том, что оно доказывает, что постоянные c'_{pqs} тождественны с структурными константами c_{pqs} группы. Формулы (9) составляют поэтому новое доказательство прямой части третьей основной теоремы.

II. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА С. ЛИ

208. Связь между инфинитезимальными преобразованиями и компонентами подвижного репера. Рассмотрим конечную и непрерывную группу, репер которой R_a изменяется как функция одного или нескольких параметров $a_1, \ldots$

Предположим, что движение репера R_a определено заданием его *абсолютных компонент* $\tilde{\omega}_s(a, da)$. Рассмотрим фиксированную точку относительно репера R_a. Когда параметры $a_1, \ldots$ возрастают на $da_1, \ldots$, эта точка подвергается преобразованию $S_{a+da} \; S_a^{-1}$; ее *абсолютные координаты* x_i получают приращение

$$dx_i = \sum_{s=1}^{r} \tilde{\omega}_s(a, da) X_s x_i. \tag{10}$$

Координаты x_i получаются в результате интегрирования системы (10), которая, следовательно, *вполне интегрируема.*

Предположим, что движение репера R_a определено заданием его *относительных компонент* $\omega_s(a, da)$. Рассмотрим фиксированную точку (относительно репера R_0); пусть x_i — ее относительные координаты (относительно репера R_a). Если величины x_i остаются фиксированными, то рассматриваемая точка подвергается некоторому перемещению, которое называется перемещением увлечения. Отметим это перемещение увлечения относительно репера R_a: оно получается, если подействовать на точку x_i преобразованием $S_a^{-1} \; S_{a+da}$, т. е. если дать x_i приращение $\sum_{s=1}^{r}\omega_s(a, da), X_s x_i$. К этому

перемещению увлечения добавляется относительное перемещение dx_i; получаемое при этом абсолютное перемещение должно быть равно нулю, т. е.

$$dx_i + \sum_{s=1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i = 0. \qquad (11)$$

Координаты x_i получаются в результате интегрирования этой системы, которая, следовательно, *вполне интегрируема.*

Мы могли бы рассуждать еще следующим образом. Инфинитезимальные преобразования $X_s f$ и относительные компоненты определяются, в силу п. **71** (стр. 169), соотношениями

$$\delta x_i = \sum_{s=1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial x_k} \delta x_k = \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p} da_p.$$

Система

$$dx_i + \sum_{s=1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i = 0, \qquad (11)$$

следовательно, эквивалентна следующей системе:

$$\sum_{k-1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1; \ldots; a_r)}{\partial x_k} dx_k + \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_p} da_p = 0.$$

Интегралы этой системы определяются уравнениями

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) = \text{const}.$$

Они дают координаты точек, образы которых при преобразовании S_a фиксированы. Система (11), следовательно, вполне интегрируема.

Пример. *Группа евклидовых движений.* Мы имеем (см. п. **68**, пример, стр. 166):

$$\sum_{s=1}^{r} \omega_s X_s f = \omega_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial f}{\partial z} +$$

$$+\omega_{23}\left(y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\omega_{31}\left(z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\omega_{12}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Система (11), интегрирование которой дает координаты неподвижной точки, имеет вид:

$$dx+\omega_1-\omega_{12}y+\omega_{31}z=0,$$
$$dy+\omega_2+\omega_{12}x-\omega_{23}z=0,$$
$$dz+\omega_3-\omega_{31}x+\omega_{23}y=0.$$

209. Приложение теоремы Фробениуса. Предыдущий пункт привел к следующей проблеме:

Пусть дана система Пфаффа

$$dx_i+\sum_{s=1}^{r}\omega_s(a, da)\,X_s x_i=0 \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{12}$$

где переменные x_i не входят в формы ω_s, а переменные a_s — в инфинитезимальные преобразования $X_s f$ (мы не предполагаем, что эти формы и эти инфинитезимальные преобразования будут необходимо относительными компонентами и инфинитезимальными преобразованиями группы); при каком условии система (12) будет вполне интегрируема?

Применим теорему Фробениуса (п. **166**, стр. 289); внешняя производная левой части (12) должна равняться нулю:

$$\sum_{s=1}^{r}\omega'_s X_s x_i+\sum_{s=1}^{r}[dX_s x_i, \omega_s]=0. \tag{13}$$

Предполагается, что дифференциалы удовлетворяют системе (12). Но из (12) следует, что если f — функция от $x_1, \ldots, x_n$, то

$$df=-\sum_{p=1}^{r}\omega_p X_p f;$$

в частности,

$$dX_s x_i=-\sum_{p=1}^{r}\omega_p X_p(X_s x_i).$$

Условие (13) можно, следовательно, написать в виде:

$$\sum_s \omega'_s X_s x_i - \sum_{s,p} [\omega_p \omega_s] X_p (X_s x_i) = 0,$$

т. е.

$$\sum_s \omega'_s X_s x_i - \sum_{(p,q)} [\omega_p \omega_q] \{X_p (X_q x_i) - X_q (X_p x_i)\} = 0,$$

или еще

$$\sum_s \omega'_s X_s - \sum_{(p,q)} [\omega_p \omega_q] (X_p X_q) = 0. \tag{14}$$

Это соотношение (14) выражает, следовательно, что система (12) вполне интегрируема.

Предположим, что число переменных a_s равно r и что r форм ω_s будут независимы. Мы можем тогда положить:

$$\omega'_s = \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\omega_p \omega_q], \tag{15}$$

коэффициенты c_{pqs} — пока функции от $a_1, \ldots, a_r$; соотношение (14) принимает вид:

$$\sum_{(p,q)} [\omega_p \omega_q] \left\{ \sum_s c_{pqs} X_s - (X_p X_q) \right\} = 0.$$

Мы должны, следовательно, иметь

$$(X_p X_q) = \sum_s c_{pqs} X_s. \tag{16}$$

Предположим, что преобразования X_s линейно независимы; в силу (16), коэффициенты c_{pqs} не могут зависеть от переменных a_s; это — постоянные величины.

Следовательно, при сформулированных предположениях тот факт, что система (12) вполне интегрируема, влечет существование таких постоянных c_{pqs}, что имеют место соотношения (15) и (16).

Обратно, когда такие постоянные существуют, соотношения (14) удовлетворены, система (12), следовательно, вполне интегрируема.

210. Уравнения структуры С. Ли. Рассмотрим снова группу, ее инфинитезимальные преобразования X_s и относительные и абсолютные компоненты ее репера ω_s и $\tilde{\omega}_s$. Системы

(10) и (11) вполне интегрируемы. Следовательно, в силу предыдущего пункта, существуют такие постоянные c_{pqs}, что

$$(X_p X_q) = \sum_{s=1}^{r} c_{pqs} X_s, \tag{17}$$

$$\omega'_s = \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\omega_p \omega_q], \tag{18}$$

$$\widetilde{\omega}'_s = - \sum_{(p,q)} c_{pqs} [\widetilde{\omega}_p \widetilde{\omega}_q]. \tag{19}$$

Мы заново установили уравнения структуры Э. Картана [(18) и (19)]; мы заново установили уравнения (7), уточнив, что постоянные c'_{pqs}, входящие в них, будут структурными константами группы.

Уравнения (17) называются *уравнениями структуры Софуса Ли.*

Пример. *Группа движений.* Уравнения структуры Э. Картана имеют вид (см. п. **160**, стр. 282):

$$\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}], \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]$$

i, j, k принимают значения 1, 2, 3; мы имеем $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ и $X_{ij} + X_{ji} = 0$).

Следовательно, инфинитезимальные преобразования X_i, X_{ij} должны удовлетворять уравнениям структуры С. Ли:

$$(X_i X_j) = 0, \quad (X_{ik} X_{kj}) = X_{ij},$$

$$(X_i X_{ij}) = X_j, \quad (X_i X_{jk}) = 0 \quad (i,\ j,\ k \text{ различны}).$$

Это, впрочем, легко непосредственно проверить, используя выражения X_i, X_{ij}, данные в п. **68** (стр. 166).

211. Группа, порожденная инфинитезимальными преобразованиями, удовлетворяющими уравнениям структуры Софуса Ли. Предположим, что заданы r линейно независимых инфинитезимальных преобразований $X_1, \ldots, X_r$, которые удовлетворяют уравнениям структуры Софуса Ли (17). Эти соотношения налагают на постоянные c_{pqs} требование удовлетворять третьей основной теореме [см. п. **207**, соотношения (8) и (9)]. В п. **203** (стр. 339) мы научились строить r независи-

мых форм Пфаффа ω_s — функций от r параметров $a_1, \ldots, a_r$, которые удовлетворяют уравнениям структуры Э. Картана (18). В силу п. **209**, система

$$dx_i + \sum_{s=1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i = 0 \qquad (11)$$

вполне интегрируема *.

Рассмотрим решение системы (11), которое определяется начальными условиями $x_i = \overset{0}{x_i}$ для $a_s = 0$. Точку с координатами x_i будем называть образом точки с координатами $\overset{0}{x_i}$ при преобразовании S_a^{-1} (это определение подсказано п. **208**). Совокупность таким образом определенных преобразований S_a образует r-параметрическое семейство преобразований, каждое из которых обладает обратным. Это семейство содержит тождественное преобразование S_0.

Если определенное решение уравнений (11) равно x_i для значений a_s параметров и равно y_i для значений b_s параметров, то тогда точка x_i является образом точки y_i при преобразовании $S_a^{-1}S_b$. Выберем $b_s = a_s + da_s$; положим $y_i = x_i + dx_i$; преобразование $S_a^{-1}S_{a+da}$ переводит точку $x_i + dx_i$ в точку x_i, причем дифференциалы dx_i определены с помощью соотношений (11). Другими словами, преобразование $S_a^{-1}S_{a+da}$ переводит точку x_i в точку $x_i + \delta x_i$, причем δx_i определены с помощью соотношений

$$\delta x_i = \sum_{s=1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i.$$

Подвижной репер $R_a = S_a R_0$, следовательно, обладает относительными компонентами. В силу первой основной теоремы (п. **78**, стр. 181), преобразования S_a образуют ядро группы.

Группа, часть которой составляет это ядро группы, зависит от r параметров; ее инфинитезимальными преобразованиями будут $X_1, \ldots, X_r$; эта группа строится с помощью способов, описанных в пп. **85** и **86** (стр. 188—190).

Наши рассуждения будут строгими, если только интегрирование уравнений (11) определяет регулярные преобразо-

---

* Другой вариант рассуждений состоит в построении форм $\tilde{\omega}_s$, удовлетворяющих уравнениям структуры (19) и в замене системы (10) системой (11).

вания S_a в пространстве точек x_i. Это случай, когда процессы пп. **85** и **86** приводят к регулярным преобразованиям.

Отсюда получаем следующее заключение:

Дополнение ко второй основной теореме теории групп (С. Ли). *Пусть даны r линейно независимых инфинитезимальных преобразований $X_1, \ldots, X_r$, определенных в пространстве n измерений $x_1, \ldots, x_n$. Чтобы они порождали r-параметрическую группу, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие условия:*

1°. *Инфинитезимальные преобразования $X_s f$ удовлетворяют уравнениям структуры Ли:*

$$(X_p X_q) = \sum_{s=1}^{r} c_{pqs} X_s \quad [c_{pqs} = \text{const.}^*].$$

2°. *Процессы построения, которые мы описали в пп.* **85** *и* **86**, *приводят к взаимно однозначным преобразованиям пространства $x_1, \ldots, x_n$.*

Замечание. Предположим, что преобразования $X_s f$ линейно зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Преобразования, которые они порождают, получаются в результате интегрирования линейной системы. Следовательно, это — линейные взаимно однозначные преобразования. Итак, содержащееся в формулировке теоремы второе условие удовлетворено.

III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП И ПОДГРУПП

212. Подгруппы данной группы. Рассмотрим группу G, ее инфинитезимальные преобразования $X_1, \ldots, X_r$ и непрерывную подгруппу g группы G. Инфинитезимальные преобразования подгруппы ** будут линейными комбинациями преобразований $X_1, \ldots, X_r$, которые удовлетворяют уравнениям структуры С. Ли.

Обратно, если система $r - \rho$ линейных комбинаций преобразований $X_1, \ldots, X_r$ удовлетворяет уравнениям структуры С. Ли, то порождаемая ими группа является подгруппой группы G, если учесть способ, которым она строится (пп. **85** и **86**).

Например, преобразования $X_{\rho+1}, \ldots, X_r$ порождают подгруппу группы G тогда и только тогда, когда

* Постоянные c_{pqs} — структурные константы группы.

** Подгруппа g предполагается аналитической. Э. Картан доказал [15], что всякая непрерывная подгруппа аналитической группы порождается инфинитезимальными преобразованиями.

$$c_{pqs} = 0 \text{ для } p = \rho + 1, \ldots, r; \; q = \rho + 1, \ldots, r; \; s = 1, \ldots, \rho. \quad (20)$$

Предположим, что эти соотношения (20) удовлетворены. В силу п. **169** [ср. уравнения (42), стр. 294], система

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_\rho = 0$$

вполне интегрируема. То из ее интегральных многообразий $r - \rho$ измерений, которое проходит через начало пространства параметров, является образом подгруппы группы G. Преобразования этой подгруппы получаются в результате интегрирования системы

$$dx_i + \sum_{s=\rho+1}^{r} \omega_s(a, da) X_s x_i = 0.$$

Следовательно, этими инфинитезимальными преобразованиями будут преобразования $X_{\rho+1}, \ldots, X_r$; этой подгруппой будет g.

Таким образом, *подгруппа, порождаемая инфинитезимальными преобразованиями*

$$X_{\rho+1}, \ldots, X_r$$

(которые предполагаются удовлетворяющими уравнениям структуры Ли), представлена в пространстве параметров интегральным многообразием системы

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_\rho = 0.$$

213. Случай изоморфизма и подобия. Рассмотрим две r-параметрические группы G_1 и G_2, оперирующие соответственно над точками x и y и обладающие одними и теми же уравнениями структуры Ли:

$$(X_p X_q) = \sum_{s=1}^{r} c_{pqs} X_s, \qquad (G_1)$$

$$(Y_p Y_q) = \sum_{s=1}^{r} c_{pqs} Y_s. \qquad (G_2)$$

В силу сформулированного на стр. 288 условия изоморфизма, эти две группы будут *изоморфны;* мы можем отождествить их пространства параметров.

Предположим, что группы G_1 и G_2 транзитивны и что можно найти такие две точки x и y, что подгруппа g_x группы G_1 и подгруппа g_y группы G_2, которые оставляют эти точки инвариантными, имеют в качестве инфинитезимальных преобразований одинаковые комбинации из X_s и Y_s; пусть, например, $X_{n+1}, \ldots, X_r$ и $Y_{n+1}, \ldots, Y_r$ — эти комбинации. Обе подгруппы g_x и g_y имеют тогда один и тот же образ в пространстве параметров; этим образом будет многообразие $r—n$ измерений, которое проходит через начало и на котором

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_n = 0;$$

группы G_1 и G_2 будут подобны группе параметров, которая рассматривается как оперирующая на интегральных многообразиях этой системы; следовательно, группы G_1 и G_2 будут *подобны.*

Мы неявно предположили, что пространства параметров групп G_1 и G_2 просто связные и что подгруппы g_x и g_y непрерывны. Если не делать этих предположений, то группы G_1 и G_2 не обязательно будут подобными. Но еще возможно отождествить эти две группы, установив соответствие между x и y; это соответствие может и не быть взаимно однозначным. Другими словами, *замена переменных $y(x)$ может отождествить уравнения группы G_1 с уравнениями группы G_2.*

214. Отыскание всех групп с одной переменной. Пусть дана конечная и непрерывная группа аналитических преобразований, оперирующая над одной переменной x.

Пусть

$$X_s f = \xi_s(x)\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (s = 1, \ldots, r)$$

— ее инфинитезимальные преобразования. Коэффициенты $\xi_s(x)$ предполагаются аналитическими функциями от x. Точки, в которых все эти функции обращаются в нуль, будут исключительными точками, которые все преобразования группы оставляют неподвижными. Предположим, что точка $x = 0$ не будет такой исключительной точкой. Линейная подстановка с постоянными коэффициентами, выполненная над $X_1, \ldots$ $\ldots, X_r$, приводит нас к случаю, когда выполняются разложения:

$$\xi_1(x) = 1 + \ldots, \quad \xi_2(x) = x^\alpha + \ldots, \xi_3(x) = x^\beta + \ldots, \ \ldots;$$

здесь 0, α, β, … — возрастающий ряд целых чисел.

Мы имеем

$$(X_pX_q)f = \left(\xi_p \frac{\partial \xi_q}{\partial x} - \xi_q \frac{\partial \xi_p}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

В силу уравнений структуры Софуса Ли, выражения

$$\xi_p \frac{\partial \xi_q}{\partial x} - \xi_q \frac{\partial \xi_p}{\partial x}$$

будут линейными комбинациями $\xi_1, \ldots, \xi_r$; их разложения, следовательно, должны начинаться членами с показателями 0, или α, или β, ... Но

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} + \ldots,$$

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \xi_3 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \beta x^{\beta-1} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Последовательность $\alpha - 1, \beta - 1, \ldots$ должна, следовательно, составлять часть последовательности $0, \alpha, \beta, \ldots$; значит, $\alpha = 1$, $\beta = 2, \ldots$. Следовательно, мы имеем разложение

$$\xi_s(x) = x^{s-1} + \ldots .$$

Но

$$\xi_{r-1} \frac{\partial \xi_r}{\partial x} - \xi_r \frac{\partial \xi_{r-1}}{\partial x} = x^{2r-4} + \ldots;$$

показатель степени $2r - 4$ должен принадлежать к последовательности $0, 1, \ldots, r - 1$; следовательно,

$$2r - 4 \leqslant r - 1, \text{ или } r \leqslant 3.$$

Предположим $r = 1$. Мы имеем однопараметрическую группу с одной переменной. Замена переменной позволит привести инфинитезимальное преобразование $X_1 f = \xi_1(x) \frac{\partial f}{\partial x}$ к виду $X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$. Группой, которую порождает это инфинитезимальное преобразование, является группа переносов на прямой $x' = x + a$.

Предположим, что $r = 2$. Поскольку

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 1 + \ldots,$$

мы имеем

$$(X_1X_2) = X_1 + \mu X_2 \qquad (\mu = \text{const.}).$$

Заменим X_1 инфинитезимальным преобразованием $X_1 + \mu X_2$; уравнение структуры группы примет вид:

$$(X_1 X_2) = X_1.$$

Следовательно, все искомые группы имеют одно и то же уравнение структуры; во всех этих группах инфинитезимальное преобразование $X_2 f = (x + \ldots) \frac{df}{dx}$ порождает подгруппу, которая оставляет неподвижной точку $x = 0$. В силу предыдущего пункта, все эти группы получаются друг из друга заменами переменной, выполненными над x. Чтобы знать их все, достаточно определить одну из них. Но наложенные на X_1 и на X_2 свойства удовлетворяются для инфинитезимальных преобразований

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x}.$$

В силу п. 85 (стр. 188), преобразования группы, которую порождают эти два инфинитезимальных преобразования, переводят точку $x(0)$ в точку $x(1)$, если $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1(t) + x\lambda_2(t).$$

Поскольку это уравнение линейное, $x(1)$ зависит от $x(0)$ линейно. Мы получаем группу линейных подстановок. Всякая двупараметрическая группа с одной переменной x, следовательно, с помощью замены переменной, выполненной над x, приводится к группе линейных подстановок:

$$x' = ax + b \qquad (a > 0).$$

Предположим теперь, что $r = 3$. Мы имеем:

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 1 + \ldots,$$

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \xi_3 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 2x + \ldots,$$

$$\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = x^2 + \ldots.$$

Уравнения структуры группы будут типа

$$(X_1X_2) = X_1 + \mu X_2 + \nu X_3,$$
$$(X_1X_3) = 2X_2 + \rho X_3,$$
$$(X_2X_3) = X_3.$$

Заменим X_1, X_2, X_3 инфинитезимальными преобразованиями вида $X_1 + \mu' X_2 + \nu' X_3$, $X_2 + \rho' X_3$, X_3. Мы можем выбрать постоянные μ' ν', ρ' так, чтобы привести уравнения структуры к виду

$$(X_1X_2) = X_1, \quad (X_1X_3) = 2X_2, \quad (X_2X_3) = X_3,$$

и мы всегда будем иметь разложение

$$\xi_s(x) = x^{s-1} + \ldots$$

Следовательно, все искомые группы имеют одни и те же уравнения структуры; во всех этих группах подгруппой, которую порождают X_2 и X_3, будет подгруппа, которая оставляет неподвижной точку $x=0$. Поэтому все искомые группы получаются из одной из двух групп с помощью замены переменной, выполненной над x (ср. п. **213**). Но можно выбрать

$$X_1f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3f = x^2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

В силу п. **85**, преобразования группы, которую порождают эти три инфинитезимальных преобразования, преобразуют $x(0)$ в $x(1)$, если $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1(t) + x\lambda_2(t) + x^2\lambda_3(t).$$

Это уравнение — уравнение Риккати; $x(1)$, следовательно, гомографическая функция от $x(0)$. Значит, всякая аналитическая трехпараметрическая группа с одной переменной с помощью замены переменной, выполненной на x, сводится к группе гомографических подстановок:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc = 1).$$

Заключение. *Всякая аналитическая, непрерывная и конечная группа с одним переменным x с помощью замены переменной, выполненной над x, сводится к одной из трех групп:*

группе переносов на прямой

$$x' = x + a;$$

группе линейных подстановок

$$x' = ax + b \qquad (a > 0);$$

группе гомографических подстановок

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc = 1).$$

Приложение. Предположим, что в теории кривых в дифференциальной геометрии приходят к построению внутренним способом параметра вдоль кривой. Этот параметр может быть вполне определен или может быть определен с точностью до преобразований группы. Эта группа необходимо будет одной из трех групп, о которых мы только что упоминали; параметр будет определяться с точностью до аддитивной постоянной, с точностью до линейной подстановки или с точностью до гомографической подстановки (см. п. **184**, стр. 314).

Пример. *Геометрия проективной плоскости.* Инвариант k образует вполне определенный в каждой точке параметр; проективная дуга σ образует параметр, определенный с точностью до аддитивной постоянной: ангармоническое отношение одной переменной точки и трех фиксированных точек образует параметр, определенный с точностью до гомографического преобразования.

IV. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ГРУППЫ И ТРЕТЬЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

215. Присоединенная нелинейная группа. Рассмотрим переменное преобразование группы S_ξ и фиксированное преобразование S_a этой группы; пусть $S_{\xi'} = S_a S_\xi S_a^{-1}$ — преобразование, сопряженное к преобразованию S_ξ с помощью преобразования S_a. Будем обозначать через T_a преобразование, оперирующее в пространстве параметров, которое переводит точку ξ в точку ξ'. Будем говорить, что преобразование T_a гомологично преобразованию S_a.

Преобразование T_a^{-1} гомологично преобразованию S_a^{-1}, ибо $S_\xi = S_a^{-1} S_{\xi'} S_a$; преобразование $T_b T_a$ гомологично преобразованию $S_b S_a$, ибо соотношения

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_a^{-1}, \qquad S_{\xi''} = S_b S_{\xi'} S_b^{-1}$$

влекут

$$S_{\xi''} = (S_b S_a)\, S_\xi\, (S_b S_a)^{-1}.$$

Преобразования T_a образуют, следовательно, группу, изоморфную группе S_a. Ее называют *присоединенной группой* группы S_a.

Этот изоморфизм — мериэдрический, если существует такое преобразование $S_a \neq I$, что каково бы ни было ξ, имеем

$$S_\xi = S_a S_\xi S_a^{-1}, \text{ т. е. } S_\xi S_a = S_a S_\xi;$$

всякое преобразование S_a, которое, таким образом, перестановочно со всеми остальными, называется *центральным преобразованием;* совокупность таких преобразований образует *центр* группы. *Присоединенная группа изоморфна, а следовательно, и подобна группе параметров, если даже группа не содержит центральных преобразований.*

216. Линейная присоединенная группа. Рассмотрим непрерывную и конечную группу, инфинитезимальные преобразования которой будут $X_1, \ldots, X_r$. Обозначим через $e_1'X_1 + \ldots + e_r' X_r$ преобразование, сопряженное к инфинитезимальному преобразованию $e_1X_1 + \ldots + e_r X_r$ с помощью преобразования S_a (см. п. **69**, стр. 166). Обозначим через τ_a линейную однородную подстановку, которая переводит точку $e_1, \ldots, e$ в точку $e'_1, \ldots, e_r'$. Отметим, как в предыдущем пункте, что преобразования τ_a образуют группу. Эта группа называется *линейной присоединенной группой.* Она изоморфна группе S_a мериэдрически или голоэдрически в зависимости от того, существует или не существует преобразование S_a, перестановочное со всеми инфинитезимальными преобразованиями X_s.

Связь между двумя присоединенными группами. Инфинитезимальное преобразование и сопряженное к нему с помощью S_a преобразование можно рассматривать как одно и то же геометрическое преобразование, отмеченное сначала относительно репера R_a, а затем относительно репера R_0. Преобразования, которые порождают эти инфинитезимальные преобразования, составляют одни и те же геометрические преобразования, отмеченные сначала относительно репера R_a, а затем относительно репера R_0. Следовательно, если мы преобразуем канонические параметры $e_1, \ldots, e_r$ точки ξ пространства параметров с помощью линейной подстановки τ_a, то мы получим канонические параметры $e_1', \ldots, e_r'$, соответствующие точке $\xi' = T_a\xi$.

217. Инфинитезимальные преобразования присоединенной линейной группы. В силу п. **205**, преобразование, сопряженное к инфинитезимальному преобразованию

$$e_1X_1 + \ldots + e_rX_r$$

с помощью бесконечно малого преобразования εX_α, есть инфинитезимальное преобразование

$$e_1X_1 + \ldots + e_rX_r + \varepsilon(e_1X_1 + \ldots + e_rX_r,\ X_\alpha) =$$

$$= e_1X_1 + \ldots + e_rX_r + \varepsilon\sum_{s=1}^{r}\{e_1c_{1\alpha s}X_s + \ldots + e_rc_{r\alpha s}X_s\}.$$

Следовательно, этому бесконечно малому преобразованию εX_α данной группы в присоединенной линейной группе соответствует бесконечно малое преобразование, которое дает e_s приращение

$$\delta e_s = \varepsilon\sum_{q=1}^{r} e_qc_{q\alpha s}.$$

Другими словами, инфинитезимальное преобразование X_α данной группы имеет в качестве гомологичного в присоединенной группе инфинитезимальное преобразование

$$E_\alpha f = \sum_{q,s} e_qc_{q\alpha s}\frac{\partial f}{\partial e_s}. \tag{21}$$

Но, когда одна группа изоморфна другой, скобке двух инфинитезимальных преобразований второй группы соответствует скобка двух соответствующих инфинитезимальных преобразований первой группы. Это следует из определения скобок, введенного с помощью понятия сопряженного преобразования (п. **205**, стр. 343).

В этом случае мы имеем:

$$(X_\alpha X_\beta) = \sum_s c_{\alpha\beta s}X_s;$$

мы должны, следовательно, иметь также

$$(E_\alpha E_\beta) = \sum_s c_{\alpha\beta s}E_s. \tag{22}$$

Определим, при каком условии инфинитезимальные преобразования типа (21) удовлетворяют уравнениям структуры (22). Мы имеем:

$$(E_\alpha E_\beta) = \sum_{\gamma,p} e_\gamma c_{\gamma\alpha p} \frac{\partial}{\partial e_p}\left(\sum_{q,s} e_q c_{q\beta s} \frac{\partial f}{\partial e_s}\right) -$$

$$-\sum_{\gamma,p} e_\gamma c_{\gamma\beta p} \frac{\partial}{\partial e_p}\left(\sum_{q,s} e_q c_{q\alpha s} \frac{\partial f}{\partial e_s}\right) = \sum_{\gamma,p,s}(c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s})\, e_\gamma \frac{\partial f}{\partial e_s}.$$

С другой стороны,

$$\sum_p c_{\alpha\beta p} E_p f = \sum_{\gamma,p} c_{\alpha\beta p} c_{\gamma p s} e_\gamma \frac{\partial f}{\partial e_s}.$$

Уравнения (22), следовательно, удовлетворяются, если только

$$\sum_{p=1}^{r}(c_{\alpha\beta p}c_{p\gamma s} + c_{\gamma\alpha p}c_{p\beta s} + c_{\beta\gamma p}c_{p\alpha s}) = 0. \qquad (23)$$

Значит, структурные константы группы удовлетворяют этим уравнениям (23); мы доказали заново прямую часть третьей основной теоремы.

218. Обратное предложение третьей основной теоремы Софуса Ли. Те факты, которые изложены в предыдущем пункте, привели Софуса Ли к следующему доказательству обратного предложения третьей основной теоремы (ср. п. **204**, стр. 341).

Зададим постоянные c_{pqs} удовлетворяющие соотношениям (23) и соотношениям $c_{pqs} + c_{qps} = 0$. Рассмотрим евклидово пространство с координатами $e_1, \ldots, e_r$ и инфинитезимальные преобразования (21) этого евклидова пространства. Вычисления предыдущего пункта доказывают, что эти инфинитезимальные преобразования удовлетворяют уравнениям структуры (22). К ним приложимы дополнение ко второй основной теореме (стр. 352) и замечание, которое следует за этим дополнением; преобразования $E_\alpha f$ линейны относительно $e_1, \ldots, e_r$. Следовательно, существует конечная и непрерывная группа Γ, инфинитезимальными преобразованиями которой будут преобразования $E_1 f, \ldots, E_r f$. Эта группа, очевидно, является одной из подгрупп группы линейных однородных подстановок над r переменными.

Но, чтобы утверждать, что уравнениями структуры группы Γ будут уравнения (22), необходимо исключить случай, который сначала упустил Софус Ли: инфинитезимальные преобразования $E_\alpha f$ должны быть линейно независимыми; в про-

тивном случае число параметров группы Γ будет меньше, чем r.

Инфинитезимальные преобразования $E_\alpha f$ будут зависимыми, если существуют такие постоянные e_α, что

$$\sum_{\alpha=1}^{r} e_\alpha c_{q\alpha s} = 0;$$

мы имеем тогда

$$(X_q, \sum_\alpha e_\alpha X_\alpha) = \sum_{\alpha,s} e_\alpha c_{q\alpha s} X_s = 0;$$

инфинитезимальное преобразование $\sum_\alpha e_\alpha X_\alpha$ тождественно со всеми сопряженными к нему преобразованиями: говорят, что *это центральное инфинитезимальное преобразование.*

Мы получаем, следовательно, обратное (еще неполное) предложение для третьей основной теоремы:

Пусть даны постоянные c_{pqs}, *удовлетворяющие уравнениям* $c_{pqs} + c_{qps} = 0$ *и уравнениям* (23); *предположим, что эти постоянные таковы, что соответствующая группа не может иметь центральных инфинитезимальных преобразований. Тогда существует группа преобразований (подгруппа группы линейных подстановок над* r *переменными), структурными константами которой будут* c_{pqs} *(С. Ли).*

Э. Картан ([14]; [19]) смог доказать полностью обратную часть третьей основной теоремы, используя одновременно свои уравнения структуры и эту теорему С. Ли, которую мы только что сформулировали. Таким образом, действительно можно построить группу (вообще нелинейную), допускающую данные структурные константы. Недавно И. Адо доказал существование линейной группы, отвечающей на этот вопрос [21]. Э. Картан дал этому результату более простое доказательство (в ещё не опубликованной * статье Journal de Mathématiques pures et appliquées).

---

* E. Cartan. *Les representations linéaires des groupes Lie* (J. Math. pures et appliqueés, т. 17, стр. 1—12).— *Прим перев.*

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Г. Дарбу (G. Darboux). *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (Paris, Gauthier — Villars, I, 1887; II, 1889; III, 1894).

2. Софус Ли (Sophus Lie). *Theorie der Transformationsgruppen,* unter Mitwirkung von F. Engel (Leipzig, Teubner, I et II, 1888; III. 1893); второе издание, 1930.

3. Л. Маурер (L. Maurer). *Über allgemeine Invariatensysteme* (Bay. Acad. Wiss. Berichte, т. 18, 1888, стр. 103—150).

4. Софус Ли (Sophus Lie). *Vorlesungen über continuerliche Gruppen,* von G. Scheffers (Leipzig, Teubner, 1893).

5. Виванти (Vivanti). *Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations* (Paris, Gauthier — Villars, 1904).

6. Демулен (Demoulin). *Sur l'emploi d'un tétraèdre mobile en Géométrie cayleyenne* (Comptes rendus, т. 139, août 1904).

7. Э. Коттон (E. Cotton). *Généralisation de la théorie du triédre mobile* (Bull. Soc. Math. de France, т. 33, 1905, стр. 42—64).

8. Э. Картан (E. Cartan). *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile* (Bull. Sc. Math. de France, т. 34, 1910, стр. 250—284).

9. Э. Картан (E. Cartan). *Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles* (Bull. Soc. Math. de France, т. 42, 1914, стр. 12—48).

10. Л. Бианки (L. Bianchi). *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti* (Pisa, Spoerri, 1918).

11. Э. Картан (E. Cartan). *Sur la déformation projective des surfaces* (Ann. Éc. Norm., т. 37, 1920, стр. 259—356).

12. Э. Картан (E. Cartan). *Sur le problème générale de la déformation* (C. R. Congres de Strasbourg, 1920, стр. 397—406).

13. Э. Картан (E. Cartan). *Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff* (Comptes rendus, т. 182, 1926, стр. 956).

14. Э. Картан (E. Cartan). *Le troisième théorème fondamental de Lie* (Comptes rendus, т. 190, 1930, стр. 914 и 1005).

15. Э. Картан (E. Cartan). *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (Mémorial des Sc. Math., т. XLII, 1930). Русский перевод этой работы см. в сборнике работ Э. Картана *«Геометрия групп Ли и симметрические пространства»,* ИЛ, М., 1949, стр. 240—292.

16. Г. Фубини и Э. Чех (G. Fubini et E. Cech). *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris, Gauthier — Villars, 1931, главы XII и XIII).

17. Л. П. Эйзенхарт (L. P. Eisenhart). *Continuous groups of transformations* (Princeton Univ. Press, 1933; имеется русский перевод: Л. П. Эйзенхарт. *Непрерывные группы преобразований.* ИЛ, М., 1947).

18. Э. Картан (E. Cartan). *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (Exposés de Géométrie, V. Paris, Hermann, 1935) *.

19. Э. Картан (E. Cartan). *La topologie des groupes de Lie* (Exposés de Géometrie, VIII, Paris, Hermann, 1936).

20. Э. Картан (E. Cartan). *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Paris, Gauthier — Villars, 1937, часть первая).

21. И. Адо. *О представлении конечных непрерывных групп линейными подстановками* (Бюлл. Казанского физ.-мат. о-ва, т. 7, 1935, стр. 1—43).

---

* Перевод этой работы см. на стр. 11—74 настоящей книги.— *Прим. перев.*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Эли Картан

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ,
ИЗЛОЖЕННЫЕ МЕТОДОМ
ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

Редактор *В. В. Гольдберг*
Технич. редактор *Г. И. Георгиева*
Корректор *М. И. Эльмус*

Сдано в набор 10/I 1963 г.
Подписано к печати 20/XI 1963 г.
Формат 60×90/16. Печ. л. 23,0
Уч.-изд. л. 20,37 Изд. № 352
Заказ 410 Тираж 6000 экз. Цена 1 р. 48 к.

Издательство Московского университета,
Москва, Ленинские горы,
Административный корпус.
Типография Издательства МГУ.
Москва, Ленинские горы

Цена 1 р. 48 к.

Цена после переоценки
2 р. 41 к.

Э. КАРТАН

ТЕОРИЯ ГРУПП И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ